

# **Navegación Aérea, Cartografía y Cosmografía**

*Dagoberto José Salazar Hernández*

10 de septiembre de 2008



# Datos del documento

---

**Navegación Aérea, Cartografía y Cosmografía**, por Dagoberto Salazar.  
6ta. Versión, 2008.

Este documento fue creado dentro del marco de la asignatura *Navegación Aérea, Cartografía y Cosmografía* (NACC) perteneciente al plan de estudio de *Ingeniería Técnica Aeronáutica* de la Escuela Politècnica Superior de Castelldefels, Universitat Politècnica de Catalunya (EPSC-UPC).

Uno de los objetivos principales en su elaboración ha sido abarcar áreas donde el material disponible es insuficiente, poco accesible o disperso. Como consecuencia de esto, se han tomado medidas para que este documento se difunda lo máximo posible.

Entre dichas medidas conviene destacar:

- El **texto** de este documento se publica utilizando una **licencia libre** que otorga amplios derechos a los usuarios. Para mayores detalles refiérase a la sección “Nota Legal” más abajo.
- Casi todas las **imágenes** de este documento son publicadas bajo la misma **licencia libre**, al ser de elaboración propia o haber sido tomadas de fuentes libres tales como la *Wikipedia* (adecuadamente referenciadas).
- Aquellas imágenes en las que no se está seguro de su libertad han sido adecuadamente referenciadas y se incluyen con un fin meramente educativo y limitado bajo la doctrina de *fair use*. Si el usuario desea hacer algún otro uso de ellas, debe contactar directamente a sus legítimos propietarios. En todo caso, actualmente se está haciendo un gran esfuerzo para sustituir esas imágenes por versiones libres.
- Se procura que este documento esté disponible en versiones para imprimir (formatos PDF y Postscript) y para leer en línea (formato HTML). Estas versiones (así como obras derivadas de este trabajo) pueden obtenerse en alguna de las siguientes URLs:

- <http://atenea.upc.edu>
  - <http://nacc.upc.es>
  - <http://gage6.upc.es>
- Para obtener las fuentes de este documento (en formato  $\text{\LaTeX 2}_{\epsilon}$ ) puede dirigirse a las URL anteriores, utilizar *subversion* para bajarlas de <svn://gage6.upc.es/nacc-libro> o escribir al autor: Dagoberto *punto* Jose *punto* Salazar *en upc punto* edu.
  - Si decide obtener las fuentes utilizando *subversion*, utilice la orden:  
`svn checkout svn://gage6.upc.es/nacc-libro`

Por otra parte, no sólo es éste un documento libre sino que además se desarrolla con la misma filosofía del *open source*, es decir: Mediante un proceso gradual pero continuado de mejoras sucesivas apuntando siempre a un resultado de gran calidad.

Por ello, sus comentarios, sugerencias y colaboraciones serán ampliamente apreciados. Por la misma razón, visite con frecuencia las URLs mencionadas y espere grandes cambios y adiciones en el futuro.

## Agradecimientos

Quiero agradecer a todos los alumnos que han cursado la asignatura NACC, quienes con su trabajo, comentarios y correcciones han permitido mejorar este material a lo largo de sus numerosas versiones. Especialmente quiero mencionar a Merixell Viñas, Natalia Vega, Jorge Gómez, Segio González y Alberto Hueltes, entre muchos otros.

También quiero agradecer a mi amigo el Dr. Jordi Bernabeu, quien muy amablemente leyó, corrigió, sugirió y en general siempre ayudó de una u otra manera en la elaboración de este documento.

## Nota Legal

El texto de este documento se publica utilizando una licencia del tipo *Reconocimiento-CompartirIgual 2.5* de *Creative Commons*.

Usted tiene libertad para:

- Copiar, distribuir y comunicar públicamente la obra.
- Hacer obras derivadas.
- Hacer un uso comercial de esta obra.

Bajo las condiciones siguientes:

- Reconocimiento. Debe reconocer los créditos de la obra de la manera especificada por el autor o el licenciador.
- Compartir bajo la misma licencia. Si altera o transforma esta obra, o genera una obra derivada, sólo puede distribuir la obra generada bajo una licencia idéntica a ésta.
- Al reutilizar o distribuir la obra, tiene que dejar bien claro los términos de la licencia de esta obra.
- alguna de estas condiciones puede no aplicarse si se obtiene el permiso del titular de los derechos de autor.

Los derechos derivados de usos legítimos u otras limitaciones reconocidas por ley no se ven afectados por lo anterior.

Las imágenes son autoría de Dagoberto Salazar y publicadas también bajo la licencia *Reconocimiento-CompartirIgual 2.5* de Creative Commons, a menos que se especifique lo contrario. En ese caso es posible que tenga que escribir a las respectivas fuentes si desea hacer una reproducción de las mismas con fines comerciales.

El material se presenta *tal como está* y no se da ninguna garantía sobre su exactitud o veracidad, ni sobre su utilidad o idoneidad para algún propósito específico.

Mayor información en <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.5/>

## Historial de revisiones

- 1.0** 23/Feb/2004 (D.S.). Primera versión.
- 2.0** 13/Sep/2006 (D.S.). Segunda versión.
- 3.0** 18/Abr/2007 (D.S.). Tercera versión.

**4.0** 14/Feb/2008 (D.S.). Cuarta versión.

**5.0** 03/Mar/2008 (D.S.). Quinta versión.

**6.0** 10/Sep/2008 (D.S.). Sexta versión.

# Índice general

---

<b>1. Conceptos de Navegación Aérea</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1
1.2. Definiciones básicas sobre navegación aérea . . . . .	2
1.2.1. Curso, derrota, rumbo y marcación . . . . .	3
1.2.2. Tiempos estimados en ruta y de llegada . . . . .	4
1.2.3. El Norte . . . . .	5
1.3. Tipos de navegación . . . . .	7
1.3.1. Navegación visual . . . . .	8
1.3.2. Navegación a estima . . . . .	8
1.3.3. Navegación autónoma . . . . .	10
1.3.4. Navegación basada en ayudas . . . . .	11
1.3.5. Navegación por satélite . . . . .	12
1.4. Métodos para determinar la posición . . . . .	14
1.4.1. Método theta-theta . . . . .	15
1.4.2. Método rho-theta . . . . .	17
1.4.3. Método rho-rho . . . . .	18
1.5. Conceptos sobre las Ondas Electromagnéticas . . . . .	19
1.5.1. Características generales . . . . .	19
1.5.2. Concepto de modulación . . . . .	23

1.5.3. El espectro electromagnético . . . . .	25
1.5.4. Propiedades de la propagación . . . . .	25
<b>2. Forma y Dimensiones de la Tierra</b>	<b>29</b>
2.1. Definiciones básicas . . . . .	29
2.2. Antecedentes históricos . . . . .	30
2.2.1. Primeras mediciones de la Tierra . . . . .	31
2.2.2. Situación durante la Edad Media . . . . .	33
2.2.3. Revolución Científica . . . . .	34
2.3. La forma general de la Tierra . . . . .	35
2.3.1. El elipsoide . . . . .	37
2.3.2. El geoide . . . . .	40
2.4. Sistemas de coordenadas terrestres . . . . .	43
2.4.1. ECEF . . . . .	44
2.4.2. Latitud, Longitud, Altura (LLA) . . . . .	50
2.4.3. Conversión entre ECEF y LLA . . . . .	56
2.4.4. Sistema de coordenadas local . . . . .	59
2.4.5. El <i>datum</i> geodético . . . . .	60
2.5. Sistemas de coordenadas celestes . . . . .	63
2.5.1. Conventional Inertial System (CIS) . . . . .	63
2.5.2. Sistema de coordenadas ecuatorial . . . . .	64
2.5.3. Sistema de coordenadas horizontal . . . . .	65
2.5.4. Convirtiendo de ECEF a coordenadas horizontales . . . . .	66
2.5.5. Distancia al horizonte . . . . .	72
2.5.6. Sistema de coordenadas eclíptico . . . . .	73
<b>3. Distancias entre puntos sobre la Tierra</b>	<b>75</b>



3.1. Relación entre el ecuador y los paralelos . . . . .	76
3.2. Cambiando de coordenadas . . . . .	77
3.3. Distancia a lo largo de un círculo máximo . . . . .	79
3.3.1. Método aproximado N°1 . . . . .	79
3.3.2. Método aproximado N°2 . . . . .	82
3.3.3. Método Andoyer . . . . .	85
<b>4. Los movimientos de la Tierra</b>	<b>89</b>
4.1. Rotación . . . . .	89
4.1.1. Día juliano . . . . .	91
4.2. Traslación . . . . .	92
4.2.1. La inclinación de la Tierra . . . . .	94
4.2.2. Elevación del Sol sobre el horizonte . . . . .	97
4.3. Precesión y nutación . . . . .	98
4.4. Movimiento del polo . . . . .	101
<b>5. El Campo Magnético de la Tierra</b>	<b>105</b>
<b>6. El Tiempo</b>	<b>109</b>
6.1. Antecedentes históricos . . . . .	109
6.1.1. El Calendario Romano . . . . .	110
6.1.2. El Calendario Juliano . . . . .	111
6.1.3. El Calendario Gregoriano . . . . .	112
6.2. Las diferentes escalas de tiempo . . . . .	114
6.2.1. Tiempo Solar Verdadero . . . . .	114
6.2.2. Tiempo Solar Medio . . . . .	117
6.2.3. Greenwich Mean Time . . . . .	119

6.2.4. Tiempo Universal . . . . .	119
6.2.5. Temps Atomique International . . . . .	120
6.2.6. Tiempo Universal Coordinado . . . . .	121
6.2.7. Tiempo GPS . . . . .	122
6.2.8. Tiempo Loran-C . . . . .	122
<b>7. Cartografía Aeronáutica</b>	<b>123</b>
7.1. Introducción . . . . .	123
7.2. Propiedades de las proyecciones . . . . .	124
7.2.1. Conformidad . . . . .	124
7.2.2. Equivalencia . . . . .	124
7.2.3. Equidistancia . . . . .	125
7.2.4. Dirección . . . . .	126
7.3. Clasificación de las proyecciones . . . . .	129
7.3.1. Tipo de superficie de proyección . . . . .	129
7.3.2. Orientación de la superficie de proyección . . . . .	130
7.3.3. Posición de la superficie de proyección . . . . .	133
7.3.4. Posición del punto de proyección . . . . .	134
7.4. Las cartas OACI . . . . .	135
7.4.1. Cartas OACI obligatorias . . . . .	136
7.4.2. Cartas OACI condicionales . . . . .	136
7.4.3. Cartas OACI opcionales . . . . .	137
7.4.4. La carta OACI 1:500 000 . . . . .	138
<b>A. Vectores y Matrices</b>	<b>141</b>
A.1. Definiciones básicas . . . . .	141
A.2. Álgebra de vectores y matrices . . . . .	145

A.2.1. Adición y sustracción de vectores y matrices . . . . .	145
A.2.2. Multiplicación de un vector o una matriz por un escalar .	146
A.2.3. Producto escalar . . . . .	146
A.2.4. Multiplicación de una matriz por otra matriz . . . . .	147
A.2.5. Producto vectorial . . . . .	148
A.3. El determinante . . . . .	149
A.3.1. Menor $M_{ij}$ . . . . .	149
A.3.2. Cofactor $A_{ij}$ . . . . .	149
A.3.3. Determinante de matrices de dimensiones $n \times n$ . . . . .	149
A.3.4. Matriz adjunta . . . . .	150
A.3.5. Rango de una matriz . . . . .	151
A.4. Inversión de matrices . . . . .	152
<b>B. Sistemas de Ecuaciones</b>	<b>155</b>
B.1. Introducción . . . . .	155
B.2. Sistemas de ecuaciones consistentes e inconsistentes . . . . .	157
B.2.1. Diferenciando sistemas consistentes e inconsistentes . . .	157
B.3. Resolviendo sistemas de ecuaciones consistentes . . . . .	158
B.4. Resolviendo sistemas de ecuaciones inconsistentes . . . . .	161
B.4.1. Método de los mínimos cuadrados . . . . .	162
B.4.2. Método de los mínimos cuadrados con pesos . . . . .	163
<b>C. Lista de Acrónimos</b>	<b>169</b>



# Índice de figuras

---

1.1. Trayectoria, ruta, tramo y <i>waypoints</i> . . . . .	3
1.2. Curso, derrota, rumbo y marcación . . . . .	4
1.3. Declinación magnética en dos puntos diferentes de la Tierra . . .	6
1.4. Declinación magnética - Año 2000 . . . . .	6
1.5. Los diferentes nortes y sus diferencias angulares . . . . .	7
1.6. Navegación a estima . . . . .	8
1.7. Error acumulativo en la navegación a estima . . . . .	9
1.8. Vista aérea de un DVOR . . . . .	12
1.9. Precision Approach Path Indicator . . . . .	13
1.10. Satélite GPS . . . . .	14
1.11. Theta fix . . . . .	15
1.12. Theta fix con marco de referencia . . . . .	16
1.13. Theta-theta fix . . . . .	17
1.14. Theta-rho fix . . . . .	18
1.15. Rho-rho fix . . . . .	19
1.16. Hiperbolic fix . . . . .	20
1.17. Onda electromagnética . . . . .	20
1.18. Propiedades de una onda . . . . .	21
1.19. Ondas con diferentes fases . . . . .	22

1.20. Polarización de las ondas electromagnéticas . . . . .	22
1.21. Onda con polarización circular . . . . .	23
1.22. Diagramas de radiación . . . . .	23
1.23. Modulación en amplitud . . . . .	24
1.24. Modulación en frecuencia . . . . .	25
1.25. Fenómeno de refracción . . . . .	27
2.1. Los Meridianos . . . . .	30
2.2. Los Paralelos . . . . .	30
2.3. Círculos mayores . . . . .	30
2.4. Círculos menores . . . . .	31
2.5. Posición relativa entre Alejandría y Syene . . . . .	32
2.6. Diagrama del cálculo de Eratóstenes . . . . .	33
2.7. El Elipsoide y la Esfera . . . . .	34
2.8. Forma general de la Tierra . . . . .	36
2.9. Forma de <i>pera</i> de la Tierra . . . . .	36
2.10. Relieve de la Tierra . . . . .	37
2.11. Ejes de un elipsoide de revolución . . . . .	38
2.12. Comparación entre el Geoide y el Elipsoide . . . . .	40
2.13. Diferencia vertical geoide-elipsoide . . . . .	41
2.14. Geoide en Europa y África . . . . .	42
2.15. Relación entre el Geoide y el Elipsoide . . . . .	43
2.16. Sistema ECEF . . . . .	45
2.17. Rotación del sistema ECEF . . . . .	46
2.18. Rotación alrededor del eje $\vec{Z}$ . . . . .	47
2.19. Elevación de Polaris en función de la latitud . . . . .	52

2.20. Sextante . . . . .	53
2.21. Octante . . . . .	53
2.22. Variación de la posición del Sol según la longitud . . . . .	55
2.23. Latitudes geodética y geocéntrica . . . . .	57
2.24. Sistemas Earth-Centered, Earth-Fixed (ECEF) y North-East-Down (NED) . . . . .	59
2.25. Sistemas ECEF y North-East-Up (NEU) . . . . .	60
2.26. Aproximación al geoide con un elipsoide local . . . . .	62
2.27. Sistema <i>CIS</i> . . . . .	64
2.28. Sistema ecuatorial . . . . .	65
2.29. Sistemas de coordenadas horizontal . . . . .	66
2.30. Antena de seguimiento por radar. . . . .	67
2.31. Sistemas ECEF y NED. . . . .	68
2.32. Sistemas ECEF y NED vistos desde el polo norte. . . . .	69
2.33. Sistemas ECEF y NED vistos lateralmente. . . . .	70
2.34. Elevación y azimut en el sistema NEU. . . . .	71
2.35. Los diferentes tipos de horizontes . . . . .	73
2.36. Sistema eclíptico . . . . .	74
3.1. Relación entre el ecuador y los paralelos . . . . .	76
3.2. Diferencia de longitud sobre un paralelo . . . . .	77
3.3. Cambiando a coordenadas rectangulares . . . . .	78
3.4. Distancia a lo largo de un círculo máximo . . . . .	80
3.5. Círculo máximo Barcelona - Nueva York . . . . .	83
4.1. El día sidereal . . . . .	90
4.2. La órbita terrestre . . . . .	92

4.3. La Eclíptica . . . . .	94
4.4. Inclínación terrestre . . . . .	95
4.5. Equinoccio de Primavera (Norte) . . . . .	96
4.6. Solsticio de Verano (Norte) . . . . .	96
4.7. Precesión y Nutación . . . . .	99
4.8. Movimiento del polo desde el año 2002 al 2006 . . . . .	102
4.9. Deriva del polo desde el año 1962.5 al 1997.5 . . . . .	102
5.1. Declinación magnética - Año 2000 . . . . .	106
5.2. Inclínación magnética - Año 2000 . . . . .	107
5.3. Cambio de posición del polo norte magnético: 2001-2005 . . . . .	107
6.1. Efecto de la excentricidad de la órbita terrestre . . . . .	116
6.2. Efecto de la inclínación de la órbita terrestre . . . . .	116
6.3. Ecuación del tiempo para el año 2005 . . . . .	118
6.4. Analema . . . . .	118
7.1. Proyección Mercator (no equivalente): África vs. Groenlandia . . . . .	125
7.2. Proyección Mollweide (equivalente): África vs. Groenlandia . . . . .	125
7.3. Línea Ortodrómica . . . . .	127
7.4. Proyección Gnomónica de una línea ortodrómica . . . . .	127
7.5. Línea Loxodrómica . . . . .	128
7.6. Líneas Loxodrómicas y Ortodrómicas sobre el globo terráqueo . . . . .	128
7.7. Proyección plana . . . . .	129
7.8. Proyección cilíndrica . . . . .	129
7.9. Proyección cónica . . . . .	130
7.10. Proyección Plana-Normal . . . . .	130
7.11. Proyección Plana-Transversa . . . . .	131



7.12. Proyección Plana-Oblicua . . . . .	131
7.13. Proyección Cilíndrica-Normal . . . . .	131
7.14. Proyección Cilíndrica-Transversa . . . . .	131
7.15. Proyección Cilíndrica-Oblicua . . . . .	132
7.16. Proyección Cónica-Normal . . . . .	132
7.17. Proyección Cónica-Transversa . . . . .	132
7.18. Proyección Cónica-Oblicua . . . . .	132
7.19. Proyección Cilíndrica Ecuatorial Tangente . . . . .	133
7.20. Proyección Cilíndrica Ecuatorial Secante . . . . .	133
7.21. Proyecciones cónicas tangentes y secantes . . . . .	134
7.22. Posiciones del punto de proyección (sobre un plano) . . . . .	135
 B.1. Velocidad teórica de un cohete . . . . .	 160
B.2. Datos de telemetría del cohete (2) . . . . .	161
B.3. Velocidad del cohete ajustada con LMS . . . . .	164
B.4. Datos de telemetría del cohete (3) . . . . .	165
B.5. Velocidad del cohete ajustada con WMS . . . . .	168



# Índice de tablas

---

1.1. Espectro radioeléctrico . . . . .	26
2.1. Parámetros de elipsoides de referencia . . . . .	39
2.2. Parámetros de la Tierra según WGS-84 . . . . .	39
2.3. Densidades relativas de materiales de la superficie terrestre. . . . .	41
2.4. Ondulación del geoide para algunas ciudades. . . . .	43
2.5. Coordenadas de algunos lugares de la Tierra . . . . .	56
2.6. Parámetros de algunos datum comunes . . . . .	62
6.1. Nombres de los antiguos meses romanos . . . . .	111
B.1. Datos de telemetría de un cohete . . . . .	155
B.2. Datos de telemetría de un cohete (2) . . . . .	161
B.3. Datos de telemetría de un cohete (3) . . . . .	165



# Conceptos de Navegación Aérea

---

## 1.1. Introducción

La navegación puede definirse como el conjunto de técnicas utilizadas para desplazarse entre un par de puntos conocidos, llamados origen y destino, siguiendo una trayectoria también conocida.

Implícita en esta definición está el procesamiento de información: es necesario conocer la **posición** en cada momento, y ello implica poseer (de alguna manera) la información necesaria y aplicarle los procedimientos y algoritmos adecuados para obtener dicha posición. La manera como se obtenga la información requerida determinará el tipo de navegación que está siendo utilizada.

Si bien durante mucho tiempo el término navegación estuvo asociado esencialmente a barcos, el desarrollo de la aviación le agregó una nueva dimensión: además de la posición horizontal (latitud y longitud), se necesita también la altura de la aeronave para garantizar que no se acerca peligrosamente a algún obstáculo. Se habla entonces de navegación 3D.

Finalmente, el gran congestionamiento del espacio aéreo en muchas partes del mundo hace necesario agregar otra variable más: el tiempo. El tener disponible un sistema de navegación que permita mantener sincronizadas las operaciones de las aeronaves facilita el introducir más aeronaves en el mismo espacio aéreo sin comprometer la seguridad. Ésta es la navegación 4D, y está siendo desarrollada actualmente.

## 1.2. Definiciones básicas sobre navegación aérea

En esta sección se proporcionarán una serie de importantes definiciones que determinarán un lenguaje común necesario para todo aquél que esté relacionado con el tema de la navegación, y que es necesario tener en cuenta para abordar temas más complejos relacionados con la navegación aérea.

Puede obtener mayores detalles y profundizar en estas definiciones si consulta, entre otras, las obras de [Hofmann-Wellenhof et al., 2003], [Calvo, 2002] y [Sáez-Nieto and Portillo-Pérez, 2003].

**Marco de coordenadas de referencia:** define un punto de origen y un conjunto de ejes que parten de dicho origen con una determinada orientación. Estos ejes son los llamados *ejes de coordenadas*.

Los marcos de referencia pueden o no ser **inerciales**. Se habla de un marco de referencia inercial si éste no está sujeto a aceleraciones, encontrándose en reposo o en movimiento traslacional uniforme. En los marcos de referencia inerciales se pueden aplicar las leyes de la mecánica de Newton.

**Posición:** es el conjunto de coordenadas que identifica a un punto dado en un marco de coordenadas específico. El proceso para hallar la posición a menudo es llamado *posicionamiento*.

**Enrutamiento:** se denomina así al proceso de planificar la ruta adecuada para llegar al destino.

**Guiado:** éste es el procedimiento para que un vehículo siga por la ruta predefinida.

**Trayectoria:** se define como el conjunto de puntos del espacio por los cuales pasa la aeronave durante su vuelo.

**Ruta:** es la curva resultante de proyectar la trayectoria sobre la superficie de la Tierra.

*Waypoints:* son puntos conocidos a lo largo de la ruta, y a menudo resaltan por alguna razón en particular (Lugares de reporte obligatorio, puntos de intersección de aerovías, etc.).

**Tramo:** llamado en inglés "*leg*" (pierna), se define como un segmento de ruta comprendido entre dos *waypoints*.

La Figura 1.1 ilustra la relación entre los conceptos anteriores.

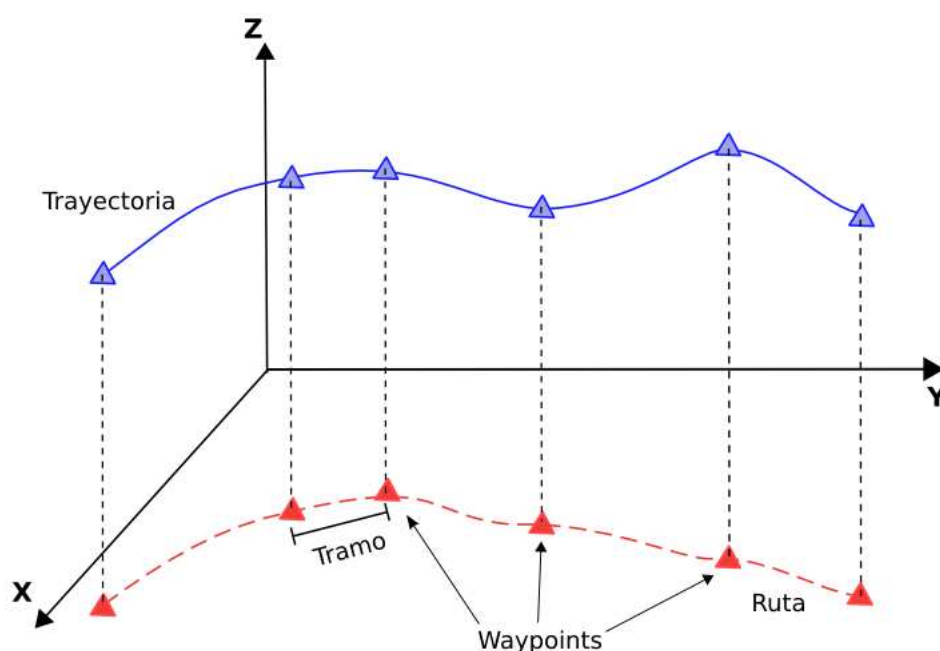


Figura 1.1: Trayectoria, ruta, tramo y waypoints

### 1.2.1. Curso, derrota, rumbo y marcación

**Curso deseado:** es el ángulo entre el norte (cualquiera que se esté usando: magnético, geográfico, etc) y la línea recta que une dos *waypoints* sucesivos en la ruta. En inglés se denomina "*Desired Track*", y se abrevia DTK.

**Derrota:** es el ángulo entre el norte y la línea tangente a la ruta (dicha tangente corresponde, por cierto, al vector velocidad de la aeronave). En inglés se le llama "*Track*" o TK.

**Error transversal:** el error transversal o "*Cross-Track Error*" (XTE) es la distancia perpendicular entre la posición de la aeronave y la línea que representa al curso deseado.

Es conveniente tener en cuenta que la diferencia entre el curso deseado (DTK) y la ruta realmente seguida (TK) por lo general es producida por factores externos tales como el **viento cruzado** (en el caso de las aeronaves) o las corrientes marinas (si se habla de barcos).

**Rumbo:** el rumbo o "*Heading*" (HDG) es el ángulo entre el norte y el eje longitudinal de la aeronave (hacia donde apunta su nariz). No coincide necesariamente con el vector velocidad (*Track*) dado que es posible, por ejemplo, que

el piloto modifique el rumbo para contrarestar un viento cruzado.

**Marcación:** se define como el ángulo entre el norte y la línea recta que une a un punto de referencia dado con la aeronave. A menudo, el punto de referencia coincide con alguna instalación importante en tierra tal como una radioayuda. En inglés se le llama "*Bearing*".

Note que el "*bearing*" dependerá siempre del punto que se esté tomando como referencia.

La Figura 1.2 presenta la relación entre los conceptos anteriores.

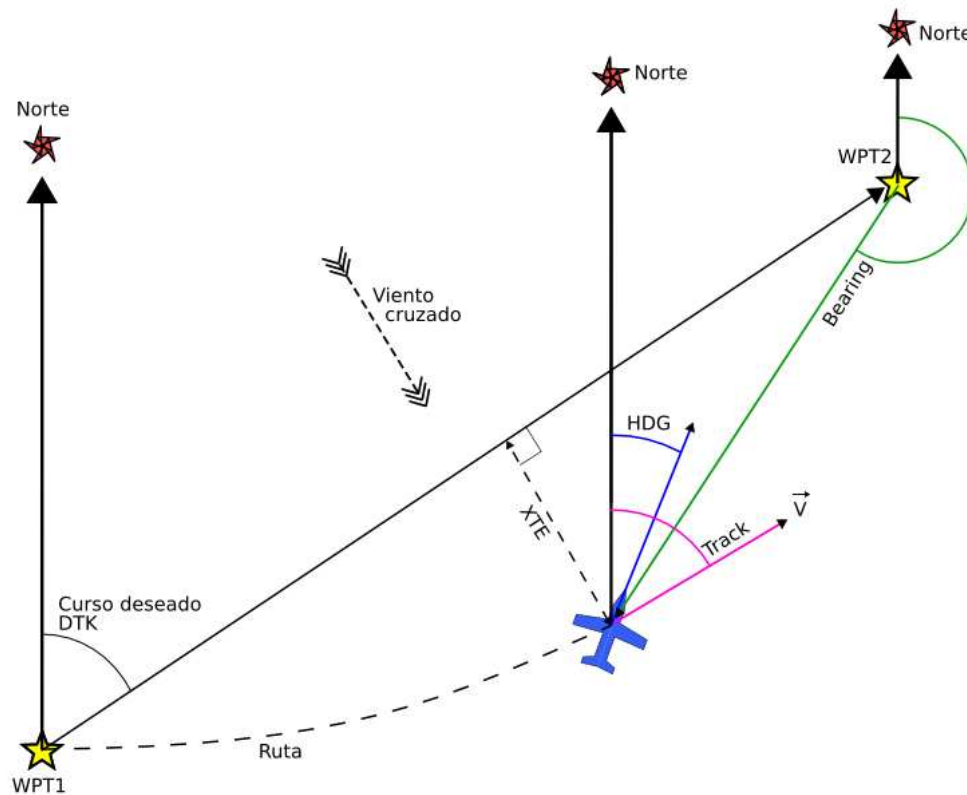


Figura 1.2: Curso, derrota, rumbo y marcación

### 1.2.2. Tiempos estimados en ruta y de llegada

*ETE: Estimated Time En-route* es el intervalo de tiempo estimado que tardará la aeronave en su ruta desde el punto de origen hasta el punto de destino.

*ETA: Estimated Time of Arrival* es la hora estimada en que la aeronave llegará a su punto de destino propuesto.



### 1.2.3. El Norte

El aparentemente simple concepto de “Norte” engloba una serie de definiciones que es necesario conocer y diferenciar adecuadamente:

- **Norte geográfico:** es el que viene dado por la intersección del eje de rotación de la Tierra con la superficie de la misma <sup>1</sup>. Es llamado también “Norte verdadero”, y en él confluyen todos los meridianos.
- **Norte magnético:** es el punto donde la mayor parte de las líneas de fuerza del campo magnético terrestre entran en la superficie. Se puede detectar utilizando instrumentos tales como la brújula y la “*flux valve*” (equivalente a la brújula en las aeronaves modernas).

Es importante hacer notar que el norte geográfico y el magnético **NO coinciden**, y que además el norte magnético cambia su posición con el tiempo.

- **Declinación magnética:** es el ángulo de desviación entre las posiciones del norte magnético y geográfico, vistas desde un punto en particular. Se denota como **D** y se considera positiva cuando el ángulo medido está hacia el Este del norte verdadero, y negativo en caso contrario.

En términos prácticos, lo anterior significa que si sobre un punto de la superficie terrestre la brújula marca un rumbo de 115°, y sabemos que la declinación magnética en ese punto es 4° E, el rumbo verdadero será 119°.

En la figura que se muestra a continuación se representa la declinación magnética para dos puntos diferentes de la superficie terrestre. Note que en uno de ellos la geometría es tal que la declinación es cero.

- **Líneas isógonas:** se llaman así a las líneas que, sobre las cartas de navegación o los mapas, unen puntos que tienen la misma declinación magnética. Son también denominadas líneas isogónicas. Adicionalmente, si una línea corresponde a puntos con declinación 0°, se habla de *línea agónica*.

Seguidamente se presenta un mapa mundial con los valores de la declinación magnética para el año 2000.

- **Norte de la Brújula:** es el norte magnético tal y como lo indica a bordo el instrumento adecuado (brújula o *flux valve*). No indica realmente el norte magnético pues el instrumento comete errores por diversas razones

---

<sup>1</sup>En realidad esta definición incluye también al polo sur geográfico. El norte será entonces el que se encuentra en el hemisferio con mayor cantidad de tierra emergida sobre el nivel del mar.

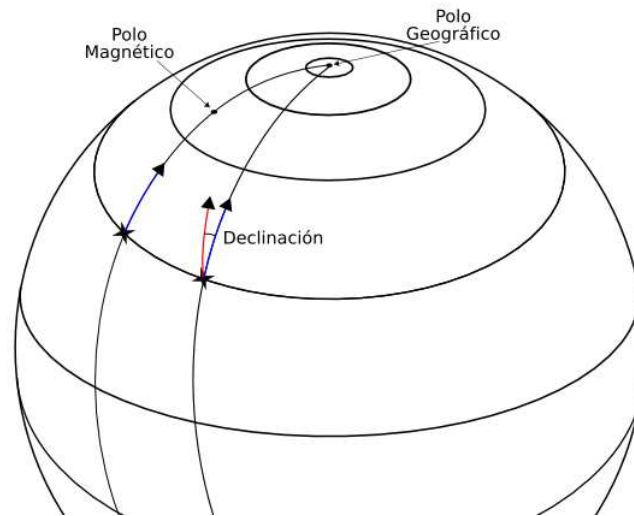


Figura 1.3: Declinación magnética en dos puntos diferentes de la Tierra

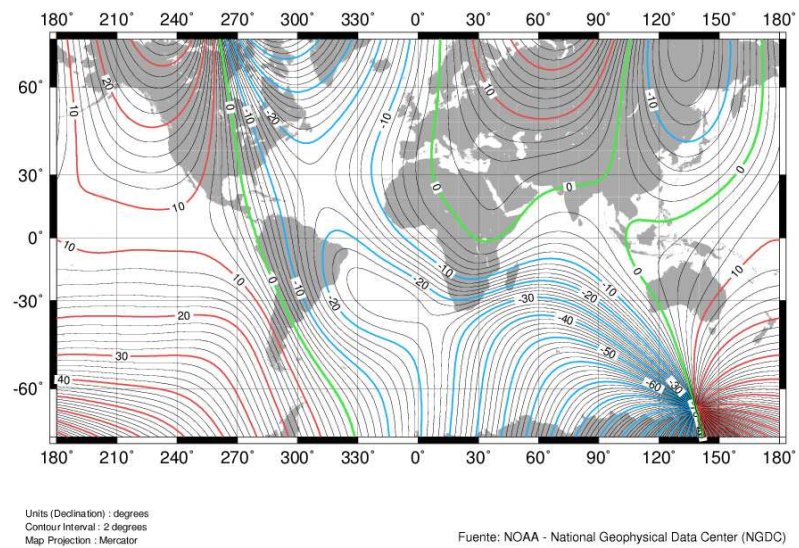


Figura 1.4: Declinación magnética - Año 2000

(presencia de masas metálicas cercanas, líneas de campo magnético que no son horizontales, etc).

- **Desviación magnética:** es el error angular cometido por la brújula o *flux valve*. El fabricante de la aeronave puede corregirla hasta cierto punto.

El esquema a continuación presenta la relación entre los nortes geográfico, magnético y de la brújula con sus correspondientes diferencias angulares.

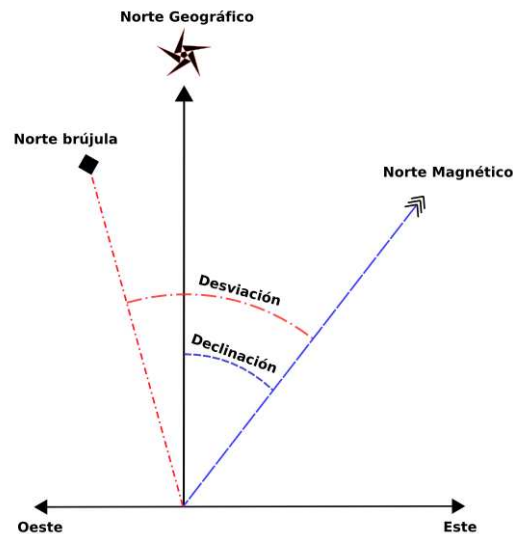


Figura 1.5: Los diferentes nortes y sus diferencias angulares

- **Norte de la Cuadrícula:** cuando se navega a grandes latitudes (muy al norte o muy al sur del planeta), no tiene sentido guiarse por el norte magnético debido, entre otras cosas, a las grandes declinaciones implicadas.

Es por ello que se define arbitrariamente el *Norte de la Cuadrícula* como el norte indicado por los meridianos de la carta de navegación que se está usando para navegar.

## 1.3. Tipos de navegación

En las siguientes secciones se presenta una breve descripción de los tipos de navegación aérea más comunes.

### 1.3.1. Navegación visual

En este tipo de navegación, el piloto debe identificar visualmente varios puntos de referencia a lo largo de su ruta. De esa manera podrá determinar su posición correcta y hacer las correcciones necesarias en caso de existir desviaciones.

### 1.3.2. Navegación a estima

Llamada en inglés *dead reckoning*, representa el proceso mediante el cual, a partir de una posición previa bien conocida (llamada *fix*), y estimando el vector velocidad de la aeronave y el tiempo transcurrido, se obtiene (por integración en función del tiempo) la posición actual de la aeronave.

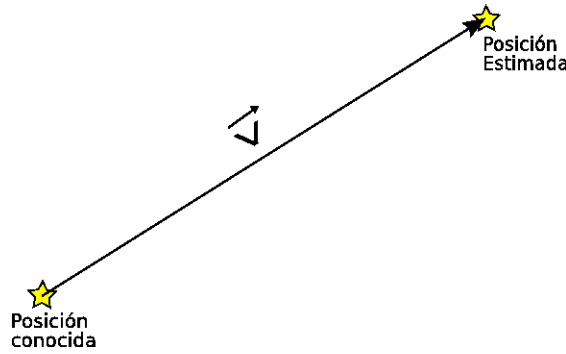


Figura 1.6: Navegación a estima

Si, dado un marco de referencia arbitrario, las coordenadas de la posición previa conocida  $P_1$  son  $(x_1, y_1)$  y las de la nueva posición  $P_2$  son  $(x_2, y_2)$ , entonces el vector que une ambas posiciones se puede denotar como  $\vec{x}_{12}$ , y en notación vectorial:

$$\vec{x}_{12} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1 = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \quad (1.1)$$

En forma matricial se expresaría como en la Ecuación 1.2.

$$\vec{x}_{12} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Y entonces, la navegación a estima implica que:

$$\vec{x}_2 = \vec{x}_1 + \vec{x}_{12} = \vec{x}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}_{12} dt = \vec{x}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \vec{v} dt \quad (1.3)$$

Nótese que en la Ecuación 1.3 se asume que el vector  $\vec{x}_{12}$  es igual a la integración del vector velocidad estimada  $\vec{v}$ . Esto **no necesariamente** es así, debido a que el vector velocidad estimada  $\vec{v}$  no necesariamente es igual al vector velocidad real  $\vec{v}_{12}$ . Esto en general se debe a:

- Una componente *adicional* a la velocidad del avión, causada típicamente, por el viento ( $v_w$ ). La acción del viento, si no está alineada con la velocidad del avión, lo saca de su curso deseado (*Desired Track* - DTK).  
Por otra parte, si el viento está alineado con el vector velocidad del avión, pero **en contra**, causará una *sobre-estimación* (*overshoot*) de la posición (se estimará que la aeronave está más allá de donde realmente está), y si está **a favor** causará una *sub-estimación* (*undershoot*) de la posición.
- Un error del sistema de navegación. Los errores más perniciosos en este sentido son los **errores sistemáticos**, que son aquellos en los que hay un *sesgo* (o *bias*) que continuamente altera la medida en una misma dirección (causando, por ejemplo, una desviación constante hacia la derecha de  $0.1^\circ$  por minuto).

Debido al proceso de integración implícito en este tipo de navegación, se tiene el inconveniente de que **los errores son acumulativos**, es decir: una pequeña desviación en las estimaciones iniciales de la posición se va convirtiendo con el paso del tiempo en un gran error, tal y como indica la Figura 1.7.

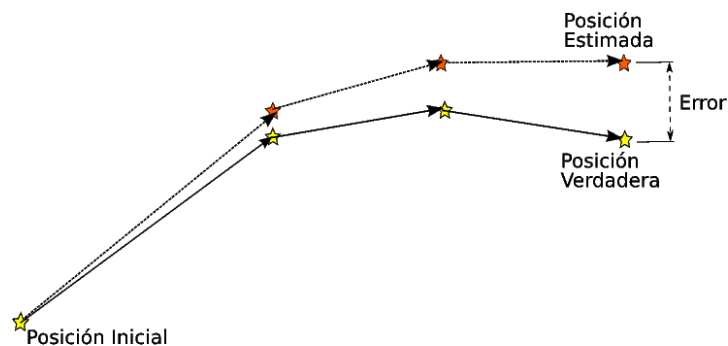


Figura 1.7: Error acumulativo en la navegación a estima

Es por esta razón que la navegación a estima debe combinarse con otros tipos de navegación (el visual, por ejemplo) para obtener una corrección de la posición que permita empezar una iteración “fresca” del método (es decir, cada cierto tiempo hace falta obtener un *fix* confiable).

También es conveniente acotar que la navegación a estima en aeronáutica se usa para conocer la posición en 2D. Para obtener la altura se utilizan las indicaciones que proporcionan instrumentos como el altímetro barométrico.

### 1.3.3. Navegación autónoma

Se habla de navegación autónoma cuando ésta se realiza sin necesidad de utilizar señales emitidas por transmisores de referencia en la tierra o en el espacio. Al principio se requiere partir de una posición conocida y en la práctica es necesario cotejar los resultados cada cierto tiempo usando otro tipo de navegación.

La más común de estas es la **Navegación inercial**, donde se utiliza un **Sistema de Navegación Inercial** (INS por sus siglas en inglés) que consiste en una plataforma estabilizada con giróscopos que sirve como marco de referencia.

Dentro de dicha plataforma unos acelerómetros y giróscopos permiten medir los cambios de velocidad (tanto traslacional como rotacional) y, mediante integración sucesiva de los datos, obtener la posición de la aeronave y su *actitud*<sup>2</sup>, como se indica en las Ecuaciones 1.4 y 1.5

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) - \vec{v}_0 &= \int_{t_0}^t \vec{a} dt \\ \vec{x}(t) - \vec{x}_0 &= \int_{t_0}^t \vec{v} dt\end{aligned}\tag{1.4}$$

$$\begin{aligned}\vec{\omega}(t) - \vec{\omega}_0 &= \int_{t_0}^t \vec{\alpha} dt \\ \vec{\theta}(t) - \vec{\theta}_0 &= \int_{t_0}^t \vec{\omega} dt\end{aligned}\tag{1.5}$$

Donde:

- $\vec{a}$ : Vector aceleración traslacional.
- $\vec{v}$ : Vector velocidad traslacional.
- $\vec{x}$ : Vector posición.
- $\vec{\alpha}$ : Vector aceleración angular.
- $\vec{\omega}$ : Vector velocidad angular.
- $\vec{\theta}$ : Vector posición angular.

Note que según las Ecuaciones 1.4 y 1.5, en realidad se está llevando a cabo un sofisticado proceso de *dead reckoning*, y debido a que la plataforma giro-estabilizada no es perfecta, en los cálculos se van introduciendo errores acumulativos que deben ser corregidos mediante fuentes externas al cabo de un cierto tiempo de vuelo.

---

<sup>2</sup>Se define como actitud de una aeronave los ángulos que su morro y alas forman con la referencia que es el horizonte. De esa manera hablamos de actitud morro arriba, ala izquierda abajo, etc.

Dicho tiempo es variable según la calidad del INS utilizado: un sistema de buena calidad acumula un error en distancia de un kilómetro o menos por hora, y el error angular típicamente es menor a pocas décimas de grado por hora [Wikipedia, 2007].

#### 1.3.4. Navegación basada en ayudas

En este caso se cuenta con la asistencia de dispositivos instalados en tierra que asisten como puntos de referencia en la navegación. Pueden funcionar por radio o ser de naturaleza visual.

##### Ayudas de radio (Radioayudas)

Las **radioayudas** se pueden clasificar según el tipo de información que proporcionan:

- **Dirección a un punto fijo:** este tipo de ayudas simplemente indica, mediante una aguja, la dirección en la que tendría que volar el piloto para llegar a un punto de referencia dado. A este tipo pertenece el sistema *ADF/NDB*.
- **Azimutales:** el **azimut** es el ángulo horizontal formado entre un eje de referencia (por ejemplo el vector radioayuda-norte magnético), y el vector radioayuda-aeronave. En esta clasificación entran, entre otros, el *VOR* y el *ILS/LLZ*.

Usar una radioayuda azimutal a menudo se denomina **navegación theta** ( $\theta$ ), por la notación que recibe habitualmente el ángulo proporcionado (azimut).

- **Cenitales:** en este caso se proporciona el ángulo vertical entre el eje de referencia radioayuda-horizonte y el vector radioayuda-aeronave. El *ILS/GS* es el ejemplo típico.
- **De distancia:** este tipo de ayudas proporcionan la distancia entre radioayuda y aeronave. Como esta distancia a menudo se denota como “rho” ( $\rho$ ), se habla entonces de **navegación rho**. A esta categoría pertenece el *DME*.

En la Figura 1.8 se presenta la vista aérea de una estación DVOR en Bélgica.



Figura 1.8: Vista aérea de un DVOR (Wikimedia)

### Ayudas visuales

Utilizadas casi desde los inicios mismos de la aviación, por lo general están asociadas a la operación de aterrizaje:

- **De punto fijo:** permiten identificar fácilmente desde lo lejos un punto de referencia importante. El faro aeronáutico es el ejemplo típico.
- **De dirección:** proporcionan al piloto información valiosa sobre la dirección de, por ejemplo, el viento (manga de viento) o el eje de la pista (luces de eje de pista).
- **De elevación:** en este caso se indica al piloto el ángulo vertical con el que se aproxima a la pista. Entran en esta categoría los sistemas de luces PAPI, VASI, etc.

La Figura 1.9 muestra el típico emplazamiento de un sistema PAPI.

### 1.3.5. Navegación por satélite

Los últimos avances en la tecnología espacial están generando una revolución en la manera como se realiza la navegación. De hecho, se estima que antes del





Figura 1.9: Precision Approach Path Indicator - PAPI (Wikipedia)

2020 los sistemas basados en navegación por satélite sustituirán a casi todos los demás sistemas utilizados actualmente.

Estos sistemas reciben el nombre genérico de *GNSS* (*Global Navigation Satellite Systems*) porque su cobertura es mundial. Los representantes más importantes son:

- **GPS**: sistema estadounidense de origen militar, es actualmente el más conocido y desarrollado. Empezó a operar a principios de la década de 1980 y se están ejecutando planes para su modernización.
- **GLONASS**: la respuesta soviética al GPS, con las dificultades económicas de la ex-URSS cayó a niveles de inoperatividad. Sin embargo, hay planes de reactivarlo gracias a la ayuda de la Unión Europea.
- **GALILEO**: es el futuro sistema GNSS, totalmente civil, actualmente en desarrollo por parte de la Unión Europea. Poseerá características que lo harán mucho más avanzado que el GPS.

La Figura 1.10 es una representación artística de un satélite GPS de la generación IIF.

Es muy importante acotar que en la actualidad **ninguno** de los sistemas GNSS operativos pueden utilizarse, por sí solo, como método único de navegación aérea. Hay dos causas principales para esto:

En primer lugar, tanto el sistema GPS como el GLONASS son de naturaleza militar y no hay garantía de que operen continuamente para los usuarios civiles (GALILEO se encuentra aun en fase de desarrollo).

En segundo lugar, ninguno de los sistemas GNSS proporciona actualmente **integridad**, es decir, la garantía de que el piloto recibirá rápidamente y de



Figura 1.10: Satélite GPS (Wikimedia)

manera automática la advertencia de que el sistema tiene una falla y dejó de funcionar adecuadamente.

Es por esta razón que se han desarrollado sistemas adicionales a los GNSS que los complementan. Éstos son los llamados **Sistemas de Aumento** y existen básicamente tres categorías:

- **SBAS**: sistemas de aumento basados en satélites. Proporcionan satélites auxiliares y estaciones de referencia en tierra con funciones específicas que complementan a los GNSS y los hacen aptos para navegación en ruta y aproximaciones a la pista. Los ejemplos son WAAS (estadunidense), EGNOS (europeo) y MSAS (japonés).
- **GBAS**: sistemas de aumento basados sólo en instalaciones en tierra. El ejemplo típico es el LAAS (aún en desarrollo), son de corto alcance y están enfocados en la asistencia en el aterrizaje.
- **ABAS**: sistemas de aumento basados en instrumentos a bordo de la aeronave. Combinan información de varios instrumentos aeronáuticos y en función de esto monitorizan el estado de los satélites GNSS.

## 1.4. Métodos para determinar la posición

Adicionalmente al método *dead reckoning*, descrito en la Sección 1.3.2, existen varias maneras de obtener la posición según la naturaleza de las ayudas de navegación disponibles para el aeronavegante.

### 1.4.1. Método theta-theta

Este método se utiliza cuando se tienen disponibles varias radioayudas de tipo *azimutal*, o en general, cuando el sistema de navegación obtiene ángulos entre ejes de referencia, puntos de referencia y la posición actual.

Para explicar los fundamentos del método<sup>3</sup>, imagine primero que el sistema de navegación de la aeronave obtiene el ángulo  $\theta_1$  entre la posición de la aeronave, el punto de referencia  $P_1$  y un eje de referencia, tal y como ilustra la Figura 1.11. Si el punto de referencia es, por ejemplo, una estación VOR, el eje de referencia apunta al norte magnético.

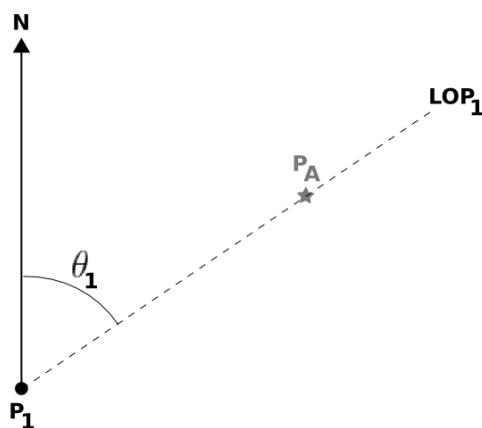


Figura 1.11: Theta fix

El conocimiento del ángulo  $\theta_1$  determina una **línea de posición** (o LOP, por sus siglas en inglés). Se sabe entonces que la aeronave se encuentra en algún lugar a lo largo de  $LOP_1$ : la línea que empieza en el punto  $P_1$  y se aleja de dicho punto en la dirección  $\theta_1$ .

Si se toma un marco de referencia rectangular de origen cualquiera, con su eje  $Y$  paralelo al el eje de referencia hacia el norte de la radioayuda, y se supone que las coordenadas del punto  $P_1$  en dicho sistema vienen dadas por  $(x_1, y_1)$ , entonces se tiene una situación como la mostrada en la Figura 1.12.

Entonces, se puede demostrar que la posición  $(x_A, y_A)$  de la aeronave es posible expresarla de manera simple como la ecuación de una recta:

$$y_A = \tan(90 - \theta_1)(x_A - x_1) + y_1 \quad (1.6)$$

<sup>3</sup>En esta explicación se supondrá que la superficie de la Tierra es plana, lo cual es una aproximación razonable sólo para distancias mucho menores que el radio de curvatura de la Tierra.

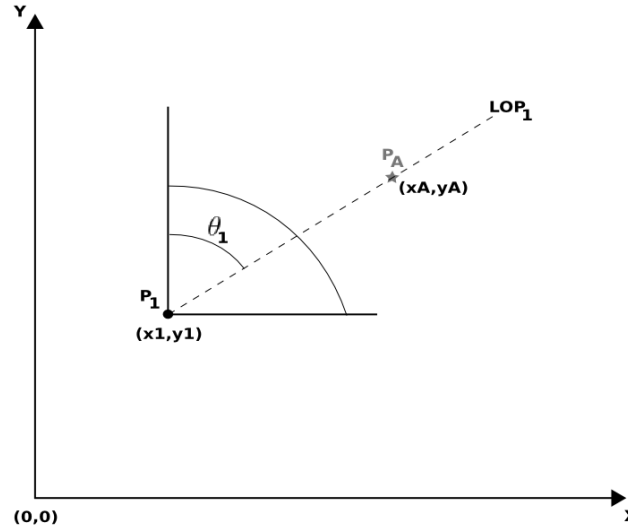


Figura 1.12: Theta fix con marco de referencia

Sin embargo esta información, aunque muy útil, es insuficiente para determinar la posición exacta de la aeronave: existe un número infinito de posiciones que cumple con la condición establecida por la  $LOP_1$  (Ecuación 1.6). Está claro que se tiene una única ecuación y que existen dos incógnitas

Es por ello que se dice que hay una **ambigüedad** en la posición. Para resolverla, es necesario obtener **información adicional**. Hablando en términos matemáticos, es necesario encontrar otra ecuación que no sea linealmente dependiente de la primera.

Ahora bien, si dentro del alcance del sistema de navegación de la aeronave se encuentra otra estación VOR  $P_2$  que proporcione una segunda medición  $\theta_2$ , la situación será la planteada en la Figura 1.13.

En este caso, se tiene una segunda línea de posición  $LOP_2$ , que al intersectarse con  $LOP_1$  proporcionará la posición de la aeronave. La Ecuación 1.7 representa a  $LOP_2$ .

$$y_A = \tan(90 - \theta_2)(x_A - x_2) + y_2 \quad (1.7)$$

Las Ecuaciones 1.6 y 1.7 se combinan entonces para resolver el sistema y obtener la posición.

Obviamente, en las consideraciones anteriores se ha supuesto que las coordenadas de los puntos  $P_1$  y  $P_2$  eran conocidas (de allí que se les considere puntos de referencia). Por lo general, esto supone que dichos puntos están en lugares fijos.

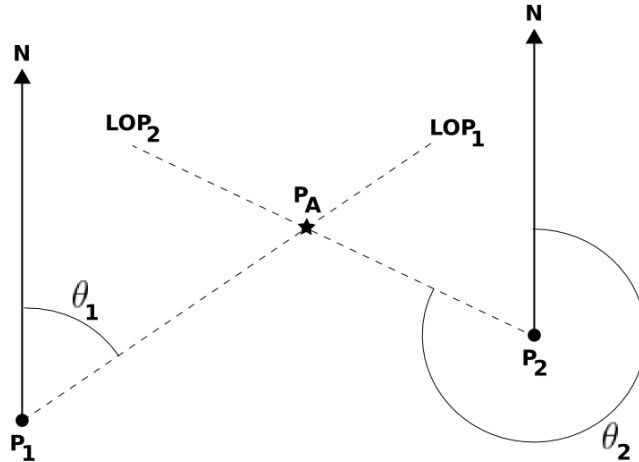


Figura 1.13: Theta-theta fix

No obstante, pudiera darse el caso de que dichos puntos fueran móviles, y entonces el sistema de navegación debería tener información suficiente para calcular la posición de los puntos de referencia en cada instante (como se hace, por ejemplo, con los satélites de los sistemas GNSS).

### 1.4.2. Método rho-theta

En ocasiones, junto con el VOR puede existir una estación DME *colocalizada*<sup>4</sup> en el punto  $P_1$ . En este caso, además de un ángulo  $\theta_1$  se tiene una distancia o rango  $\rho_1$ , como indica la Figura 1.14.

Como puede verse, hay dos líneas de posición:  $LOP_1$  correspondiente al ángulo  $\theta_1$  y  $LOP_2$ , que corresponde al rango  $\rho_1$  (de hecho, esta "línea de posición" es en realidad una circunferencia, pero el concepto se mantiene). En la intersección entre ambas LOPs se encuentra la aeronave.

La ecuación que corresponde a  $LOP_2$  se puede expresar como en 1.8:

$$(y_A - y_1)^2 + (x_A - x_1)^2 = \rho_1^2 \quad (1.8)$$

Note que este sistema puede resolverse incluso si el VOR y el DME no están en el mismo lugar. Asimismo, es posible que la LOP de  $\rho$  constante intersecte a la

<sup>4</sup>Es decir, colocada en el mismo lugar o muy cerca (a menos de un centenar de metros), y asociada al VOR desde el punto de vista operativo y funcional (por ejemplo, sus frecuencias están relacionadas entre sí).

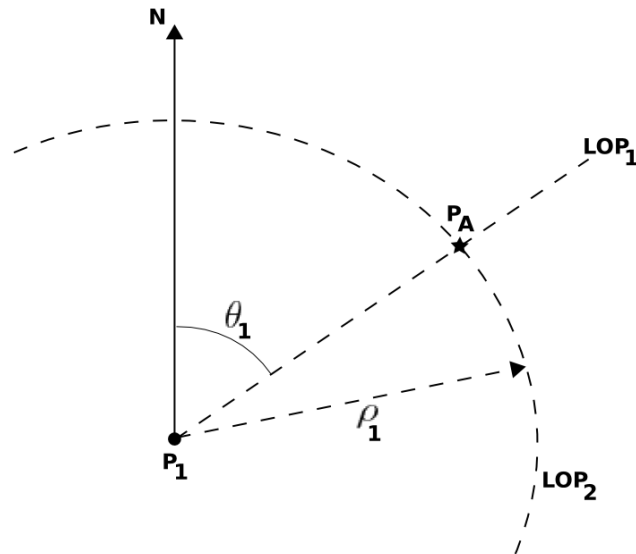


Figura 1.14: Theta-rho fix

LOP de  $\theta$  constante en más de un lugar, dando como resultado una ambigüedad que deba resolverse con información adicional.

### 1.4.3. Método rho-rho

En este caso, se tienen al menos dos radioayudas que proporcionan información de distancia, como se indica en la Figura 1.15.

Se puede ver con facilidad la aparición de una ambigüedad en la parte inferior de la Figura 1.15. Las fuentes de información adicional usadas habitualmente para resolver dicha ambigüedad son:

- Agregar mediciones (ecuaciones) adicionales (de  $\rho$  o  $\theta$ ) que permitan discernir la posición correcta.
- Dado que la aeronave despegue de una posición conocida, un registro cuidadoso de la ruta seguida puede permitir discriminar cuál es la posición correcta. Esto significa que se está utilizando información adicional del pasado (en vez del presente) para resolver la ambigüedad.
- Para vehículos terrestres y acuáticos, a veces es posible utilizar información sobre el entorno para resolver la ambigüedad. Por ejemplo, el sistema de navegación de un barco puede descartar una ambigüedad que caiga en tierra, y el de un coche podría eliminar todas las posiciones posibles que caigan fuera de calles y carreteras.

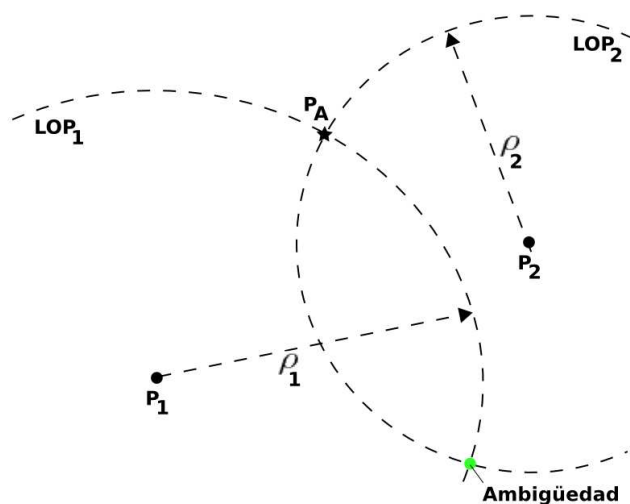


Figura 1.15: Rho-rho fix

### Método hiperbólico

El método hiperbólico es una versión del  $\rho$ - $\rho$ , pero en vez de utilizar los rangos absolutos se utiliza la **diferencia** entre ellos. Variaciones del método usan la diferencia entre fases, o tiempos de recepción, como muestran los diversos sistemas de navegación que utilizaban este método, como el Omega, el LORAN, el Decca, etc.

El uso de la diferencia entre rangos genera LOPs que son **hipérbolas**, como muestra la Figura 1.16.

Note que en la Figura 1.16 la ambigüedad queda resuelta al generar la hipérbola entre los puntos  $P_2$  y  $P_3$ .

## 1.5. Conceptos sobre las Ondas Electromagnéticas

### 1.5.1. Características generales

Como su nombre lo indica, las radioayudas basan su funcionamiento en las ondas de radio. Por ello, es necesario empezar explicando los conceptos básicos asociados a las ondas en general y a las ondas electromagnéticas en particular (de las cuales las ondas de radio son apenas un subconjunto).

En este sentido, es menester empezar definiendo lo que es una **onda electromagnética**: es un tipo de radiación en forma de onda que se caracteriza

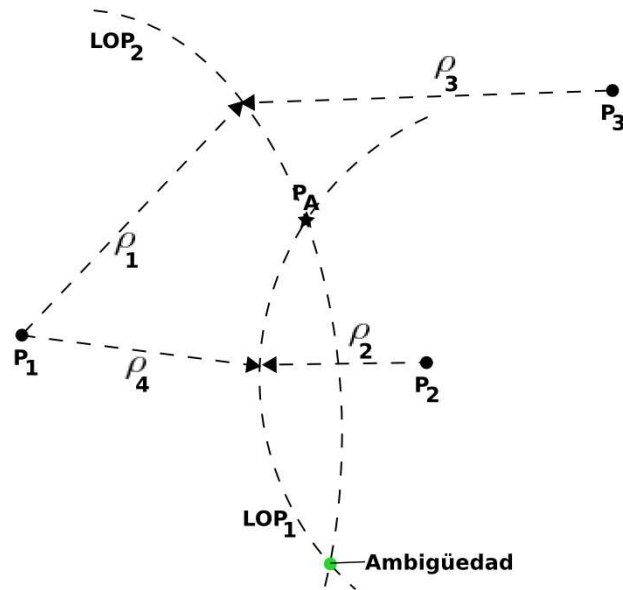


Figura 1.16: Hiperbolic fix

por poseer dos campos: un campo eléctrico y otro campo magnético, oscilando perpendicularmente entre sí. La Figura 1.17 representa una onda electromagnética:

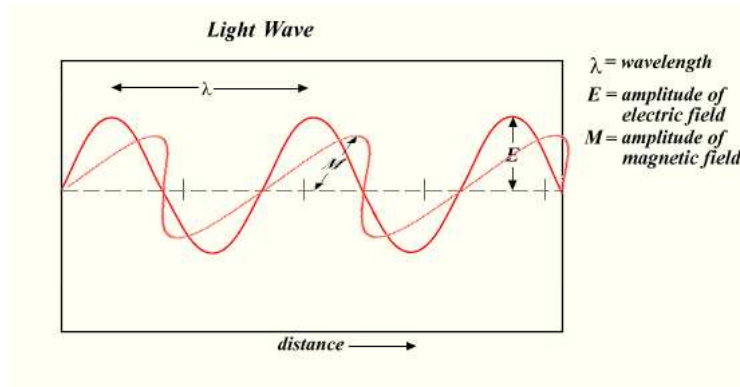


Figura 1.17: Onda electromagnética (Wikipedia)

Siguen a continuación una serie de conceptos que es necesario repasar para entender mejor el comportamiento de estas ondas y sus aplicaciones.

**Ciclo:** se denomina ciclo a cada patrón repetitivo de una onda.

**Período:** es el tiempo que tarda la onda en completar un ciclo.



**Frecuencia:** número de ciclos que completa la onda en un intervalo de tiempo. Si dicho intervalo es de un segundo, la unidad de frecuencia es el *Hertz (Hz)*. Otras unidades de frecuencias muy utilizadas (en otros ámbitos) son las “revoluciones por minuto” (RPM) y los “radianes por segundo” (*rad/s*).

El período y la frecuencia están relacionados como muestra la Ecuación 1.9.

$$f = \frac{1}{T} \quad (1.9)$$

**Amplitud:** es la medida de la magnitud de la máxima perturbación del medio producida por la onda.

**Longitud:** la longitud de una onda viene determinada por la distancia entre los puntos inicial y final de un ciclo (por ejemplo, entre un valle de la onda y el siguiente). Habitualmente se denota con la letra griega  $\lambda$  (lambda).

Un factor importante a tener en cuenta es que el tamaño y diseño de las antenas está fuertemente influenciado por la longitud de onda. Por ejemplo, una antena dipolo sencilla debe tener una longitud  $\lambda/2$  para que sintonice de manera óptima las ondas de longitud  $\lambda$ .

Los conceptos anteriores están representados en la Figura 1.18:

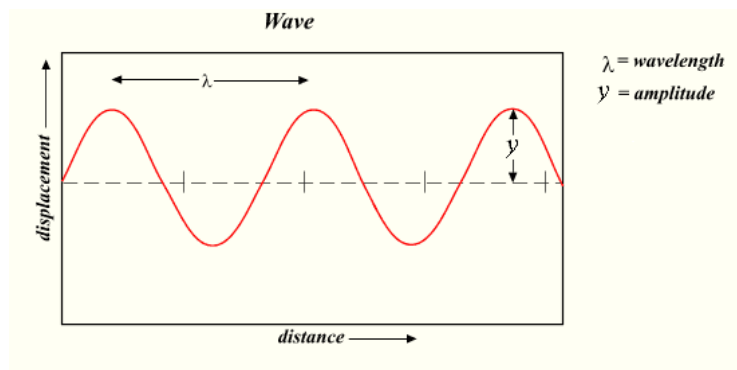


Figura 1.18: Propiedades de una onda (Wikipedia)

**Velocidad:** las ondas se desplazan a una velocidad que depende de la naturaleza de la onda y del medio por el cual se mueven. En el caso de la luz, por ejemplo, la velocidad en el vacío se denota  $c$  y vale 299.792.458 m/s (aproximadamente  $3 \cdot 10^8$  m/s).

Los conceptos de velocidad, longitud y frecuencia están interrelacionados. Para el caso de las ondas electromagnéticas (de las cuales la luz es un ejemplo), la relación se expresa en la Ecuación 1.10.

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad (1.10)$$

**Fase:** la fase de una onda relaciona la posición de una característica específica del ciclo (como por ejemplo un pico), con la posición de esa misma característica en otra onda. Puede medirse en unidades de tiempo, distancia, fracción de la longitud de onda o (más comúnmente) como un ángulo.

Tome en cuenta que la definición de fase conlleva implícita la comparación de dos ondas **de la misma frecuencia**, pues en caso contrario no tiene mucho sentido dicha comparación.

La Figura 1.19 muestra varias ondas con diferentes fases.



Figura 1.19: Ondas con diferentes fases (Wikipedia)

**Polarización:** la polarización representa la orientación con la que la onda oscila, y en el caso particular de las ondas electromagnéticas, la orientación en la oscilación del campo eléctrico. A menudo esta orientación es una línea y por ello se habla típicamente de ondas con polarización vertical u horizontal, es decir, cuando el campo eléctrico oscila en un plano con esas direcciones.

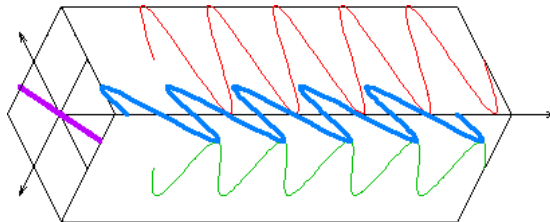


Figura 1.20: Polarización de las ondas electromagnéticas (Wikipedia)

Adicionalmente, es posible que el campo eléctrico cambie su orientación conforme la onda avanza. Se habla entonces de ondas con **polarización circular** (ver la Figura 1.21).

**Diagramas de radiación:** las ondas electromagnéticas utilizadas por las radioayudas típicamente se emiten o reciben utilizando diferentes tipos de antenas. Dependiendo del tipo de antena utilizada, la energía electromagnética puede o no emitirse (o recibirse) con igual intensidad en todas las direcciones.

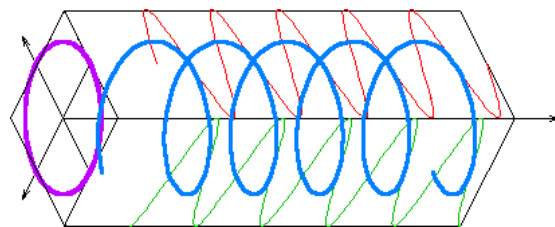


Figura 1.21: Onda con polarización circular (Wikipedia)

Se denomina entonces **diagrama de radiación** (o emisión) a un diagrama polar que represente la intensidad relativa de la señal electromagnética en función del azimut alrededor de la antena.

En la Figure 1.22 se presentan dos diagramas de radiación. El de la izquierda es en forma de "ocho" y es muy usado en aviación, mientras que el de la derecha representa una antena isótropa (o no-direccional: aquella cuya emisión o recepción no depende de la dirección).

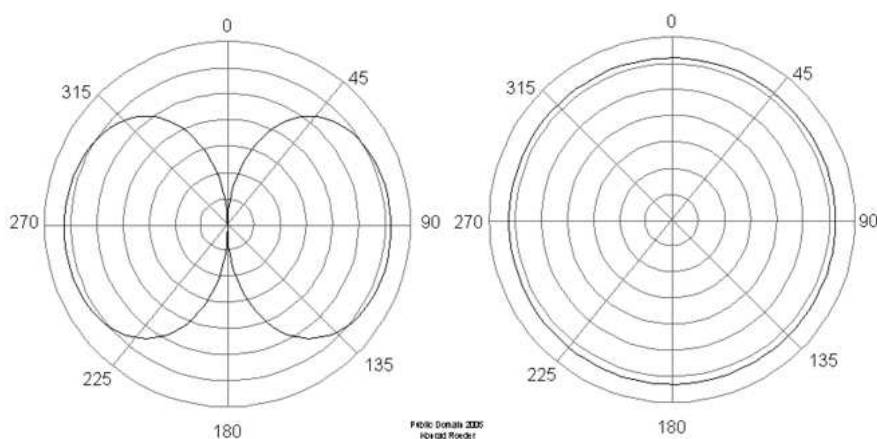


Figura 1.22: Diagramas de radiación (Wikipedia)

### 1.5.2. Concepto de modulación

Cuando se compara el rango de frecuencia típico de la voz humana (400 Hz a 4000 Hz) con el rango de frecuencia de las ondas de radio (a partir de los 30 kHz, aproximadamente), se hace evidente que no es posible convertir directamente de sonido a radio. Es necesario llevar a cabo un proceso intermedio para transmitir una onda de baja frecuencia utilizando una de mayor frecuencia.

Se define entonces la **Modulación** como el proceso de alterar las características de una onda (llamada *portadora* o *carrier*) para que transporte información.

Son varios los parámetros de la portadora que se pueden alterar, pero los más habituales en el contexto aeronáutico son la amplitud y la frecuencia.

AM: en este caso, se modifica la amplitud de la portadora en proporción directa a la señal moduladora. Este fue el primer método para la emisión de radio comercial.

En la Figura 1.23 se esquematiza la modulación AM:

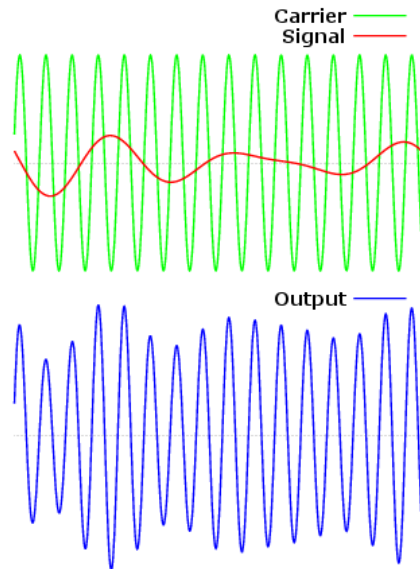


Figura 1.23: Modulación en amplitud (Wikipedia)

FM: en esta forma de modulación la información se representa mediante variaciones de la frecuencia instantánea de la onda portadora.

La modulación FM se representa en la Figura 1.24:

**Bandas laterales:** en comunicaciones vía radio se denomina así a las bandas de frecuencias superiores y/o inferiores a la de la portadora que aparecen por causa del proceso de modulación.

**Canal:** se denomina canal a una banda de radiofrecuencia específica que ha sido asignada para un uso dado por medio de acuerdos internacionales.

Por ejemplo, los canales de voz en aeronáutica tienen un ancho predefinido de 50 kHz, lo que incluye el espacio para la banda de voz, las bandas laterales que aparezcan al modular, y unos márgenes en los extremos para separarlos adecuadamente de los canales adyacentes.

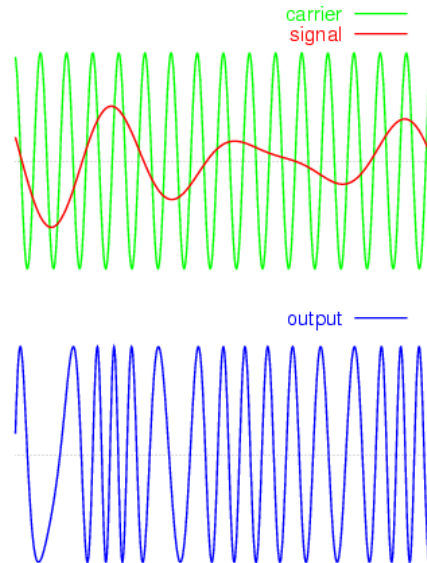


Figura 1.24: Modulación en frecuencia (Wikipedia)

### 1.5.3. El espectro electromagnético

Se denomina espectro electromagnético a todo el rango posible de radiación electromagnética. Esto incluye las ondas de radio, los infrarrojos, la luz, los ultravioletas, los rayos X, gamma, etc.

En función de lo anterior, el *espectro radioeléctrico* o de *radiofrecuencia* (RF) se refiere a la porción del espectro electromagnético en el cual las ondas electromagnéticas pueden generarse alimentando a una antena con corriente alterna. La Tabla 1.1 presenta las bandas de RF más importantes.

Recuerde que a mayor frecuencia la longitud de onda se reduce, razón por la cual es posible encontrar también la tabla anterior en función de la longitud y clasificando el espectro en ondas kilométricas, decimétricas, milimétricas, etc.

### 1.5.4. Propiedades de la propagación

Las características de la propagación de las ondas electromagnéticas son importantes para comprender algunas de las características de los sistemas que las utilizan. Por eso, en esta sección se repasarán los aspectos más importantes de la propagación.

Hay algunas propiedades generales de la propagación que son independientes de la frecuencia de la onda RF de la cual se esté hablando:

Abreviatura	Nombre	Frecuencia	Algunos usos
VLF	Very Low Frequency	3-30 kHz	Loran-C
LF	Low Frequency	30-300 kHz	ADF/NDB
MF	Medium Frequency	300-3000 kHz	ADF/NDB
HF	High Frequency	3-30 MHz	COMM larga distancia
VHF	Very High Frequency	30-300 MHz	VOR, COMM ACFT
UHF	Ultra High Frequency	300-3000 MHz	DME, radar, GNSS
SHF	Super High Frequency	3-30 GHz	Radar, COMM microondas
EHF	Extremely High Frequency	30-300 GHz	Radioastronomía

Tabla 1.1: Espectro radioeléctrico

- La velocidad de una onda electromagnética es constante mientras no cambie el medio de propagación.
- La velocidad de una onda electromagnética en el vacío es siempre  $c = 299.792.458 \text{ m/s}$ .
- Las ondas electromagnéticas tienden a reflejarse en objetos de tamaño similar a su longitud de onda ( $\lambda$ ).
- Las ondas electromagnéticas se propagan en línea recta mientras no sufran influencias externas ni cambien de medio de propagación.

Es oportuno recordar que la **reflexión** es el cambio abrupto en la dirección de la onda cuando ésta llega a la unión de dos medios diferentes, regresando al medio original.

Por otro lado, la **refracción** es el cambio en velocidad de una onda cuando pasa de un medio a otro. Es de hacer notar que a menudo el cambio en velocidad implica un cambio de dirección (dado que la velocidad es un vector). Véase la Figura 1.25.

Un concepto estrechamente relacionado con el de la refracción es el del **ángulo límite** o **ángulo crítico**. Cuando el ángulo de incidencia de la onda con respecto a la normal es mayor que dicho ángulo, la onda se refleja en vez de refractarse.

La expresión para el ángulo límite es la 1.11, donde  $n_1$  y  $n_2$  son los índices de refracción de los medios de origen y destino, respectivamente.

$$\theta_{crit} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \quad (1.11)$$

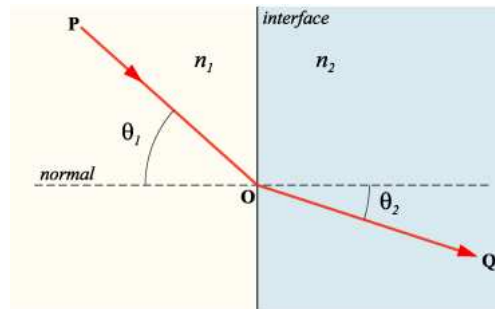


Figura 1.25: Fenómeno de refracción (Wikipedia)

Finalmente, pero no por ello menos importante, hay que tener en cuenta que la potencia de una onda electromagnética va disminuyendo mientras se aleja de la fuente con una relación inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

Por otro lado, hay propiedades de la propagación que son fuertemente dependientes de la frecuencia de la onda. Si bien no hay una separación estricta entre cada caso, se suele dividir a las ondas en tres grandes tipos según su forma predominante de propagación:

### Ondas de tierra

Las **ondas de tierra** u **ondas de suelo** se caracterizan porque aprovechan las propiedades conductivas del terreno (tierra, agua, etc.) para propagarse. De esta manera, son capaces de sortear grandes obstáculos y llegar muy lejos, con un alcance casi global. A pesar de su nombre, no es necesario estar en el suelo para poder recibirlas.

Este tipo de propagación es predominante en las frecuencias bajas (VLF, LF y MF, principalmente), y por ello se requiere de grandes antenas y mucha potencia para emitirlas y recibirlas.

El hecho de que su alcance sea tan grande limita su uso, pues plantea el problema de potenciales interferencias entre estaciones muy lejanas. Asimismo, su trayectoria puede ser difícil de predecir dado que se refractan en las fronteras entre medios diferentes, como por ejemplo las costas (tierra/agua). El Loran-C es una de las pocas radioayudas que utiliza este tipo de ondas.

### Ondas ionosféricas

Las **ondas ionosféricas** u **ondas de cielo** aprovechan las características eléctricas de la **ionosfera** para propagarse, usándola como una especie de “espejo”. En

realidad, más que una reflexión es una refracción progresiva limitada por el ángulo crítico (lo que implica que cierta cantidad de energía se escapa al espacio). Es predominante en las frecuencias medias: MF y HF.

Evidentemente, una propagación de este tipo se ve fuertemente influenciada por la geometría relativa entre emisor, ionosfera y receptor. Para complicar la situación, la posición y características de la ionosfera son altamente variables, pues dependen del Sol. Por eso, la situación es diferente durante el día y durante la noche, y cambia según la estación del año y el ciclo solar. Adicionalmente, el *terminator* (frontera entre el día y la noche) también afecta la propagación.

Debido a esta compleja situación aparecen "zonas de oscuridad", es decir, zonas donde no hay recepción porque ninguna onda ha rebotado con la geometría adecuada para proporcionar cobertura. Asimismo, es posible que hayan múltiples rebotes sucesivos (proporcionando un alcance muy largo pero inestable).

Otro problema que presentan estas ondas es el **efecto fading**: a cierta distancia del emisor, el receptor puede recibir la misma onda pero que ha seguido caminos diferentes (una parte se propagó como onda de tierra y otra como de cielo), ocasionando interferencia destructiva y resultando en una señal que aparece y desaparece rápidamente.

En el ámbito aeronáutico, el ADF/NDB y las comunicaciones de largo/medio alcance utilizan este tipo de propagación.

### Ondas de línea de vista

Las ondas de este tipo se propagan en línea recta, de forma análoga a como lo haría la bala de un rifle. Debido a lo anterior, su alcance es limitado y no pueden rodear obstáculos de tamaño medio.

Esta limitación se convierte en una ventaja dado que entonces es posible reutilizar las frecuencias una y otra vez si los emisores/receptores están lo suficientemente alejados entre sí. Además, las frecuencias altas (VHF y superior) en donde este tipo de propagación predomina son mucho menos susceptibles a la interferencia por causa de estáticos.

Debido a sus ventajas, la inmensa mayoría de las comunicaciones y aplicaciones aeronáuticas modernas (VOR, DME, ILS, GNSS y un largo etcétera) se hace con ondas de línea de vista.



# Forma y Dimensiones de la Tierra

---

La navegación aérea se realiza sobre la superficie de la Tierra, y por ello es necesario conocer la forma y dimensiones de ésta para entender mejor los conceptos asociados con el arte de la navegación.

## 2.1. Definiciones básicas

Con el fin de iniciar el estudio sobre el planeta Tierra, es necesario repasar primero el significado de algunos conceptos importantes.

**Eje de los polos** Es el eje alrededor del cual la Tierra realiza su movimiento de rotación. Pasa por el centro del planeta.

**Ecuador** Es la intersección de la superficie terrestre con el plano que pasa por el centro de la Tierra y que es perpendicular al eje de los polos.

**Meridianos** Son las intersecciones de la superficie terrestre con los semiplanos que contienen al eje de los polos. Por tanto, son perpendiculares al Ecuador.

**Paralelos** Son las intersecciones de la superficie terrestre con los planos perpendiculares al eje de los polos. Por ello, el Ecuador es un tipo especial de paralelo (el único que pasa por el centro de la Tierra).

**Círculo mayor o círculo máximo** Son los que provienen de planos que pasan por el centro de la Tierra, y por tanto la dividen en dos hemisferios iguales (p.e., el Ecuador y los meridianos son círculos máximos). Se puede demostrar que sobre la superficie de una esfera, la línea más corta entre dos puntos es el círculo máximo que los incluye.

**Círculo menor** Los que se forman a partir de planos que *NO* pasan por el centro de la Tierra (p.e., los paralelos).

Las siguientes figuras ilustran los conceptos anteriores:

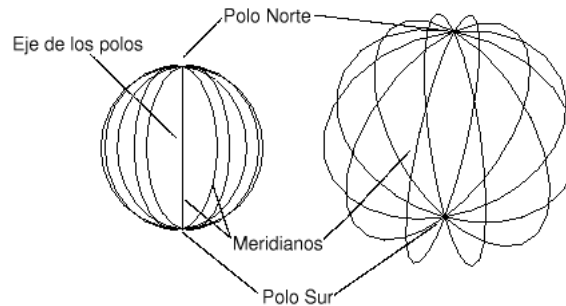


Figura 2.1: Los Meridianos

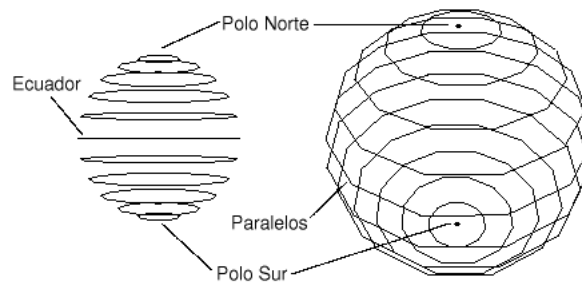


Figura 2.2: Los Paralelos

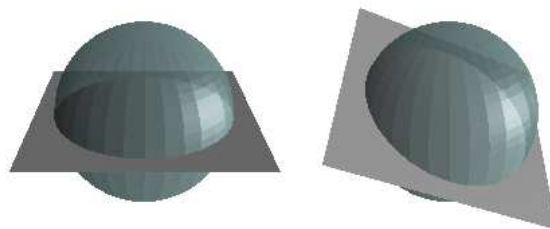


Figura 2.3: Círculos mayores

## 2.2. Antecedentes históricos

El hombre primitivo se movía lentamente por la faz de la Tierra, tan sólo a la velocidad que le permitían sus piernas (unos 5 km/h a buen paso). Si tomamos

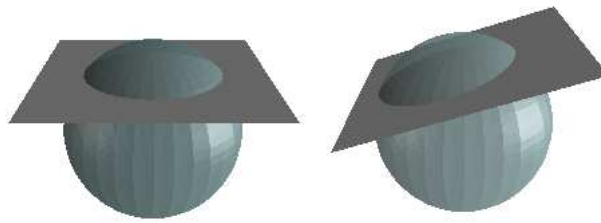


Figura 2.4: Círculos menores

en cuenta que además debía detenerse para cubrir sus necesidades primarias y las de la tribu (cazar, beber, cocinar, descansar, etc), es evidente que le requería un gran esfuerzo y tiempo recorrer distancias muy pequeñas, comparadas éstas con el radio de la Tierra.

En estas condiciones, es fácil entender porqué al principio se pensaba que la Tierra era plana: había que recorrer grandes distancias para notar el efecto del radio de curvatura de la superficie terrestre.

No obstante, conforme la humanidad empezó a utilizar medios de transporte más avanzados (caballo, botes, etc.), fue capaz de recorrer mayores distancias en menor tiempo, y surgió la necesidad de desarrollar las artes de la navegación. Asimismo, el radio de curvatura de la Tierra empezó a hacerse más evidente.

Hay elementos que conducen a pensar en una Tierra que no es plana. Por ejemplo, durante los eclipses lunares (cuando la Tierra se interpone entre la Luna y el Sol), la sombra que se aprecia sobre la Luna es circular, lo que sugiere que la Tierra es una esfera. No obstante, algunos personajes de la antigüedad (por ejemplo, el poeta Homero [Wikipedia, 2006i]) atribuían esto a que la Tierra era un disco plano. Otras formas más exóticas fueron propuestas en diferentes culturas.

### 2.2.1. Primeras mediciones de la Tierra

Sin embargo, varios importantes pensadores griegos (Pitágoras, Aristóteles, Arquímedes y Platón) se inclinaban por la esfericidad de la Tierra, si bien más por razones filosóficas que científicas (pensaban que la esfera era el sólido más perfecto).

En todo caso, el filósofo griego Eratóstenes de Cyrene (actual Libia) fue la primera persona conocida que estimó la circunferencia de la Tierra utilizando el método científico, aproximadamente en el 240 antes de nuestra era. Eratóstenes vivió del año 276 AC al 194 AC, y otro de sus logros es el desarrollo de un sistema

que utilizaba los conceptos de latitud y longitud [Wikipedia, 2006f].

El método utilizado por Eratóstenes fue el siguiente: él había recibido reportes indicando que en el pueblo de Syene (llamado Aswan en el Egipto moderno), el día del solsticio de verano el Sol de mediodía se reflejaba en las aguas del fondo de un pozo vertical profundo<sup>1</sup>.

Por otra parte, él observó que el mismo día el Sol no estaba completamente vertical sobre Alejandría (localizada al norte de Syene, casi en el mismo meridiano. Vea la figura 2.5), donde vivía, porque un gran obelisco generaba sombra, incluso a mediodía. Eratóstenes midió el ángulo de dicha sombra con la vertical y determinó que era de  $7^{\circ} 12'$ .



Figura 2.5: Posición relativa entre Alejandría y Syene

En dicha época existían *contadores de pasos*, personas que se ganaban la vida midiendo distancias caminando entre dos puntos dados con una longitud de paso muy regular y contando el número de estos pasos. De acuerdo a los archivos de la época, la distancia entre Alejandría y Syene era de 5000 *estadios*, donde un estadio equivalía a 157,5 m [Torge, 1991].

Con la información anterior (y un esquema adecuado<sup>2</sup> como el mostrado en la figura 2.6), es sencillo estimar el radio de la Tierra utilizando la ecuación:

$$R = \frac{\Delta G}{\gamma} \quad (2.1)$$

Donde  $\Delta G$  es la longitud del arco entre Alejandría y Syene, mientras que  $\gamma$  es el ángulo geocéntrico entre estas ciudades, expresado en radianes.

<sup>1</sup>Esto coloca a Syene/Aswan muy cerca del Trópico de Cáncer. Razone porqué.

<sup>2</sup>En este esquema se ha colocado el Sol dos veces para indicar que los rayos solares llegan paralelos entre sí, dado que el Sol se encuentra muy lejos comparado con el radio de la Tierra.

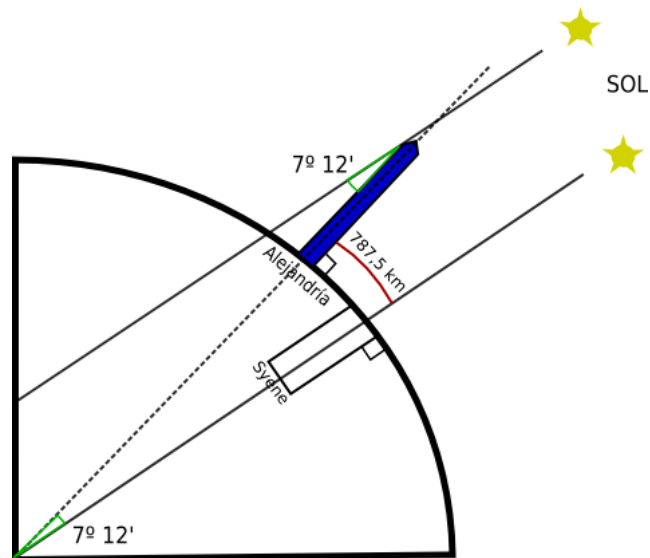


Figura 2.6: Diagrama del cálculo de Eratóstenes

Gracias a esto, Eratóstenes estimó que la circunferencia de la Tierra era de 39375 km (es decir, un radio de 6267 km). Dado que el radio medio de la Tierra aceptado hoy en día es de unos 6371 km (40030 km de circunferencia), el error cometido estaba alrededor del 2 %, una hazaña formidable para la época y los medios con que se contaba.

Eratóstenes no fue el único en llevar a cabo estos cálculos. Muchos años después el matemático indio Aryabhata (476-550 DC) logró estimar el tamaño de la Tierra con menos de 1 % de error, el mejor valor obtenido hasta la Revolución Científica [Wikipedia, 2006a].

### 2.2.2. Situación durante la Edad Media

Sin embargo, durante la edad media se perdieron buena parte de los conocimientos obtenidos en la antigüedad. Claudio Ptolomeo (90-168 DC) se basó en las estimaciones de Posidonius de una circunferencia terrestre de poco menos de 29000 km para elaborar sus mapas del mundo conocido. Los trabajos de Ptolomeo se convirtieron en dogma de la iglesia católica y por tanto durante mucho tiempo se tomaron como verdad estos incorrectos valores.

La errónea creencia en una Tierra más pequeña sirvió a Cristóbal Colón para sustentar su plan de llegar a las *Indias Orientales* (el actual sureste asiático) navegando hacia el oeste. Hoy en día sabemos que era algo prácticamente

imposible para los barcos de la época<sup>3</sup>: de no haber estado América situada relativamente cerca de Europa, la travesía por el Océano Pacífico hubiera resultado demasiado larga, y los marineros hubieran muerto de hambre y sed<sup>4</sup>.

### 2.2.3. Revolución Científica

A partir de la revolución científica, la invención del telescopio, el teodolito y los logaritmos permitieron hacer mediciones y cálculos más precisos. El astrónomo francés Jacques Cassini (1677-1756) midió en 1713 el arco del meridiano que va desde Dunkerque hasta Perpignan. Luego, dividió este arco en dos trozos y determinó que las longitudes de arco correspondientes a un grado *no eran iguales en ambos trozos*. Concluyó, correctamente, que la forma de la Tierra no era realmente una esfera sino que se acercaba más a un elipsoide de revolución<sup>5</sup>, como muestra la siguiente figura:

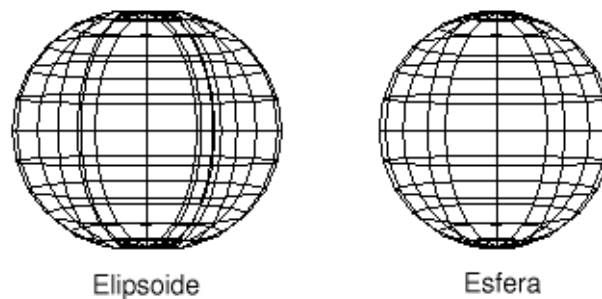


Figura 2.7: El Elipsoide y la Esfera

Sin embargo, Cassini erróneamente calculó que un grado de arco al *norte* de París era *más largo* que un grado de arco al *sur*, lo que sugería que el eje más largo del elipsoide era paralelo al eje de los polos. Esto contradecía los cálculos hechos por Sir Isaac Newton y Christiaan Huygens, basados en la Teoría de la Gravitación, y que predecían un elipsoide achatado en los polos [Wikipedia, 2006i].

Adicionalmente, el astrónomo J. Richer descubrió en 1672 que un péndulo que había ajustado en París para que oscilara con un período de un segundo, al trasladarlo a Cayena (Guyana Francesa, muy cerca del Ecuador) ya no estaba

<sup>3</sup>Algunas fuentes [Wikipedia, 2006c] sugieren que Colón buscó los mapas con las distancias más pequeñas, y además los interpretó erróneamente a su favor. De allí la oposición a sus planes por parte de los asesores de la Reina Isabel La Católica.

<sup>4</sup>Se han dado casos de embarcaciones pequeñas que a la deriva han hecho la travesía entre América y Asia gracias a las corrientes oceánicas, pero han sido casos puntuales difíciles de repetir con éxito.

<sup>5</sup>El sólido definido por una elipse en rotación alrededor de alguno de sus ejes.

calibrado sino que oscilaba más lentamente. Esto sugería que el valor de la gravedad había disminuido, y por ende la distancia al centro de la Tierra había aumentado.

Esta situación impulsó a la Academia Francesa de Ciencias a despachar dos expediciones con el fin de realizar mediciones más precisas: una a Laponia (1736-37) y la otra a Perú (1735-44). Los resultados de estas expediciones permitieron confirmar que los elipsoides teóricos de Newton y Huygens se acercaban más a la realidad.

Un resultado de la expedición a Perú (así como otra realizada por George Everest a la India) fue el descubrimiento de que la *vertical astronómica*<sup>6</sup> era modificada cuando se hacían mediciones cerca de grandes cordilleras montañosas (debido a la atracción gravitatoria de las grandes masas de roca). Esto condujo al concepto de *geoide* (forma del campo gravitatorio terrestre) y al estudio de las *ondulaciones del geoide*, de gran importancia para determinar el nivel medio del mar y la correcta trayectoria de los satélites artificiales, entre otros fenómenos.

Hoy en día, la ciencia que se encarga de *la medición y el mapeo de la superficie terrestre* es llamada *Geodesia* [Torge, 1991], ciencia fundamental para la navegación de precisión moderna.

## 2.3. La forma general de la Tierra

Para hacer cálculos sencillos y aproximados, es conveniente pensar que la Tierra es una esfera. No obstante, como se vió en la sección anterior, en la realidad la forma de nuestro planeta es más compleja: ligeramente achatada en los polos y abultada en el Ecuador, con el hemisferio sur un poco más voluminoso que el norte, y con la rugosidad propia que le da el relieve del terreno.

Observaciones detalladas mediante técnicas modernas han mostrado que si exagerásemos estas características, la Tierra se asemejaría más bien a una *pera*, como muestra la siguiente figura adaptada de [Seeber, 1993].

Nótese que a esta forma general hay que agregarle la correspondiente a la orografía de la superficie terrestre que es muy compleja, tal y como lo refleja la figura 2.10 que muestra el relieve del planeta, incluyendo el fondo de los océanos.

Por otra parte, hay que tener en cuenta que la altura de la montaña más alta del planeta, el Monte Everest, es de 8844 m [Wikipedia, 2006d]. Esto representa

---

<sup>6</sup>La vertical astronómica es la obtenida utilizando un peso o plomada colgando de un hilo fino.

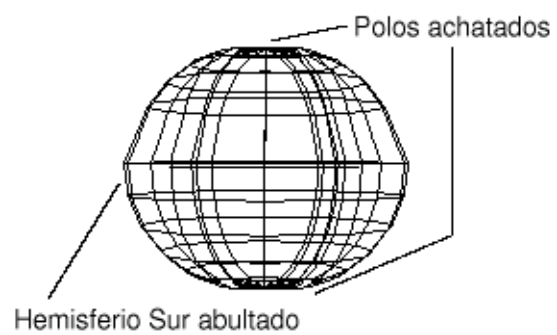
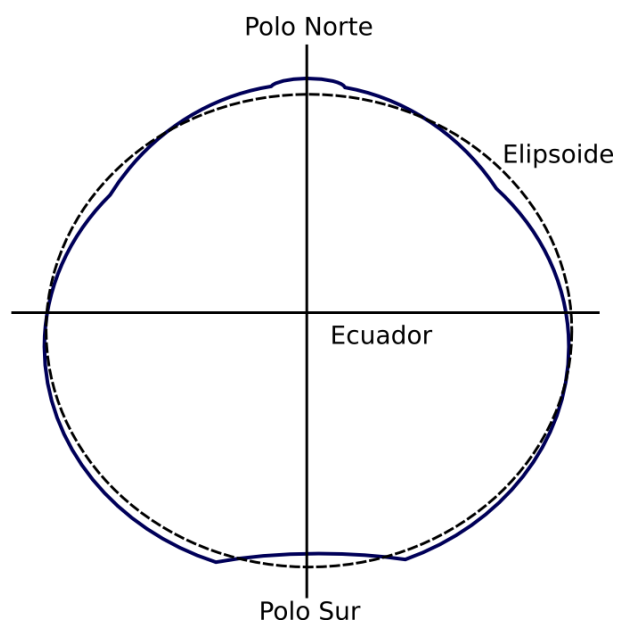


Figura 2.8: Forma general de la Tierra

Figura 2.9: Forma de *pera* de la Tierra



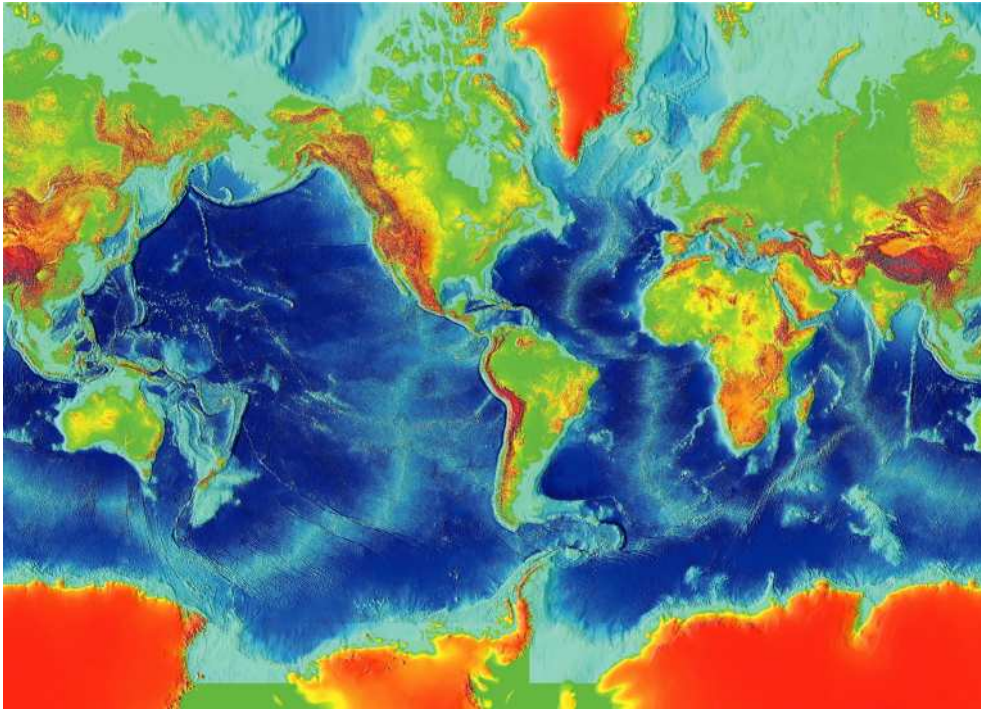


Figura 2.10: Relieve de la Tierra. Fuente: NOAA

menos del 0,14 % del radio medio de la Tierra. Por la razón anterior, es razonable utilizar aproximaciones en vez de la forma general del planeta para muchas aplicaciones, en particular la navegación global.

### 2.3.1. El elipsoide

En general, es más práctico trabajar la forma de la Tierra como si fuera un *elipsoide*, sin considerar las ondulaciones propias de la topografía. Esto se debe a que el elipsoide es una figura matemática fácil de usar que es lo suficientemente parecida a la forma de la Tierra cuando se están trabajando las coordenadas en el plano: latitud y longitud.

Existen diferentes modelos de elipsoides utilizados en geodesia, denominados *elipsoides de referencia*. Las diferencias entre éstos vienen dadas por los valores asignados a sus parámetros más importantes:

- *Semieje ecuatorial ( $a$ )* o *Semieje mayor*: longitud del semieje correspondiente al ecuador, desde el centro de masas de la Tierra hasta la superficie terrestre.

- *Semieje polar (b) o Semieje menor*: longitud del semieje desde el centro de masas de la Tierra hasta uno de los polos. Alrededor de este eje se realiza la rotación de la elipse base<sup>7</sup>.

La relación entre el eje ecuatorial y el polar se presenta en la figura 2.11.

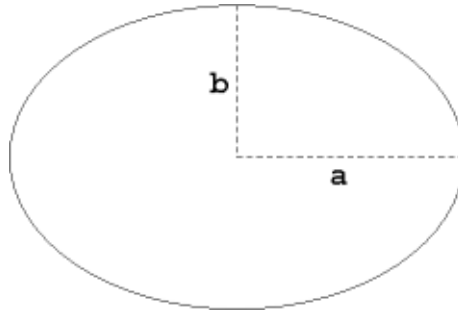


Figura 2.11: Ejes de un elipsoide de revolución

Es habitual describir matemáticamente a una elipse como esta mediante la ecuación 2.2.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2.2)$$

- *Factor de achatamiento (f)*: este factor representa qué tan diferentes son los semiejes entre sí. Su expresión es:

$$f = 1 - \frac{b}{a} \quad (2.3)$$

Note que mientras más cerca de cero se encuentre  $f$ , más parecido a una esfera es el elipsoide. Por lo general el factor  $f$  es muy pequeño, por lo que se acostumbra proporcionar  $1/f$ . Por la misma razón a veces, y para cálculos simples, se utiliza una esfera en vez de un elipsoide<sup>8</sup>.

Una manera equivalente de indicar  $f$  es mediante la *excentricidad* de la elipse transversal:

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \quad (2.4)$$

Que es equivalente a:

<sup>7</sup>Algunos, aunque pocos, elipsoides de referencia no son de revolución, sino que definen un tercer eje, ortogonal a los dos anteriores.

<sup>8</sup>El factor de achatamiento de la Tierra va disminuyendo muy lentamente con el tiempo. En comparación, la luna es prácticamente esférica, mientras que Júpiter es visiblemente oblongo, con  $f = 1/15$  [Wikipedia, 2006n].

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad (2.5)$$

Los valores de estos parámetros para algunos elipsoides de referencia importantes se presentan en la tabla 2.1 (adaptada de [μ-blox ag., 1999]):

Nombre	$a$ (m)	$b$ (m)	$1/f$
<i>Australian National</i>	6378160.000	6356774.719	298.250000
<i>Bessel 1841</i>	6377397.155	6356078.963	299.152813
<i>Clarke 1866</i>	6378206.400	6356583.800	294.978698
<i>Clarke 1880</i>	6378249.145	6356514.870	293.465000
<i>Everest 1956</i>	6377301.243	6356100.228	300.801700
<i>Fischer 1968</i>	6378150.000	6356768.337	298.300000
<i>GRS 1980</i>	6378137.000	6356752.314	298.257222
<i>International 1924 (Hayford)</i>	6378388.000	6356911.946	297.000000
<i>SGS 85</i>	6378136.000	6356751.302	298.257000
<i>South American 1969</i>	6378160.000	6356774.719	298.250000
<i>WGS 72</i>	6378135.000	6356750.520	298.260000
<i>WGS 84</i>	6378137.000	6356752.314	298.257224

Tabla 2.1: Parámetros de elipsoides de referencia

Uno de los elipsoides de referencia más utilizados actualmente es el descrito en el sistema denominado *World Geodetic System 84* (WGS-84), desarrollado por el Departamento de Defensa de los EEUU, y que tiene como origen el centro de masas de la Tierra. Su popularidad se debe a que es el utilizado por el sistema de posicionamiento global por satélite Global Positioning System (GPS).

El *elipsoide WGS-84* define los parámetros para la Tierra indicados en la tabla 2.2.<sup>9</sup>

Nombre	Símbolo	Valor
<i>Semieje mayor de la elipse</i>	$a$	6378,137000 km
<i>Semieje menor de la elipse</i>	$b$	6356,752314 km
<i>Factor de achatamiento</i>	$f = \frac{a-b}{a}$	1/298,257223563
<i>Velocidad angular de la Tierra</i>	$\omega_e$	$7292115 \cdot 10^{-11}$ rad/s

Tabla 2.2: Parámetros de la Tierra según WGS-84

<sup>9</sup>Note que, en realidad, un elipsoide de referencia no solamente define parámetros relacionados con la forma, sino que también puede proporcionar parámetros físicos como la velocidad angular  $\omega$ .

### 2.3.2. El geoide

No obstante la ventaja de ser una figura matemática sencilla, el elipsoide no es adecuado cuando lo que deseamos medir son altitudes. Dado que la mayor parte de la Tierra está cubierta por mares y océanos (70,8 %, según [Wikipedia, 2006d]), entonces la superficie de referencia por excelencia para medir altitudes es el nivel medio del mar. Además, este nivel medio es una mejor aproximación a la forma real de la Tierra vista desde el espacio.

El nivel medio del mar, a su vez, depende de las irregularidades en el campo gravitatorio de la Tierra (véase la sección 2.2.3), que alteran su posición. El agua de los océanos del globo busca estar en equilibrio, y por ello tiende a seguir una superficie gravitatoria equipotencial.

Es por esto que se introduce una nueva figura llamada *Geoide*, definida como: *la superficie equipotencial del campo gravitatorio de la Tierra que mejor se ajusta (en el sentido de mínimos cuadrados), al nivel medio global del mar*<sup>10</sup> (ver [National Geodetic Survey, 2006]). Una de las consecuencias de esta definición es que el geoide es *siempre* perpendicular al vector de gravedad local en cada punto.

La figura 2.12 (adaptada de [Seeber, 1993]) muestra una comparación entre el geoide y el elipsoide:

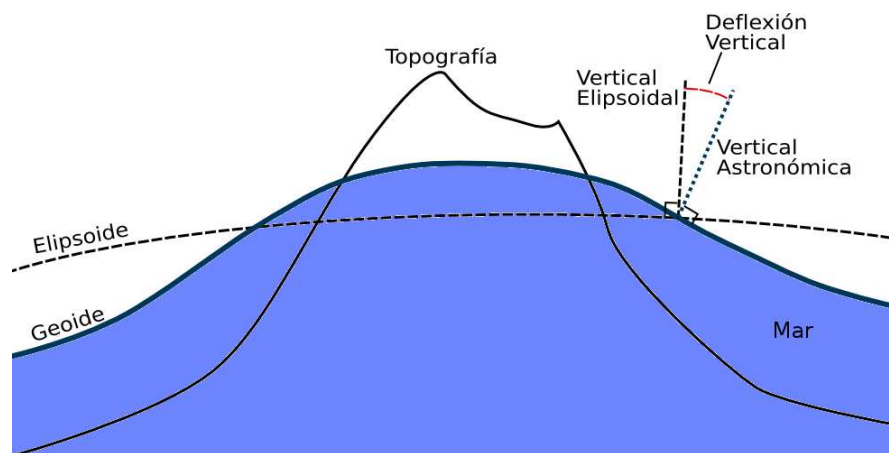


Figura 2.12: Comparación entre el Geoide y el Elipsoide

Como ya se mencionó, es fácil asociar el geoide al nivel medio del mar en las zonas oceánicas. Esto se muestra en la figura 2.13, donde se grafica la diferencia

<sup>10</sup>Estrictamente, el nivel medio del mar no coincide exactamente con el geoide. Existe una pequeña diferencia introducida por la salinidad, las corrientes, la temperatura y otros efectos locales.

vertical entre geoide y elipsoide y pueden apreciarse diferencias de hasta 150 m. Por otra parte, sobre los continentes lo que se hace es tomar medidas cuidadosas para extender el concepto a las zonas secas, lo que permite utilizar una referencia de alturas común y coherente<sup>11</sup>.

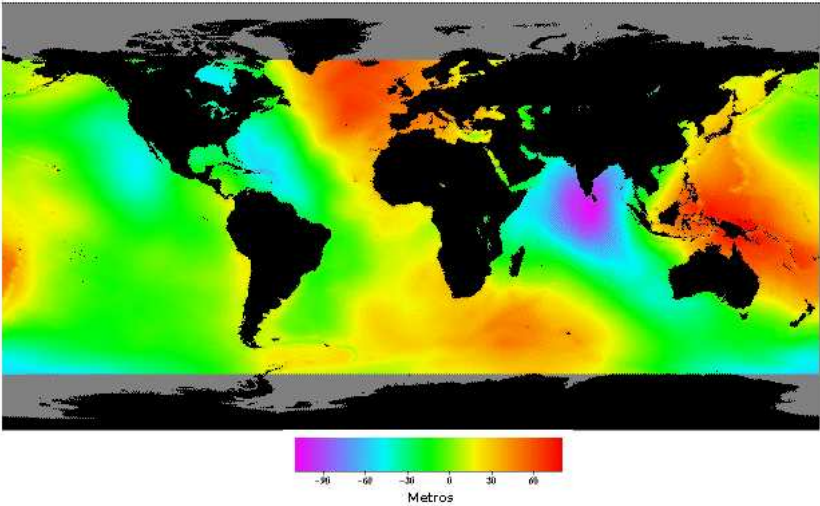


Figura 2.13: Diferencia vertical geoide-elipsoide. Fuente: NASA.

Medir el geoide a nivel mundial es una tarea difícil, pues la corteza terrestre no es homogénea y por tanto su densidad no es uniforme, lo que altera la fuerza de gravedad en un punto dado. Asimismo, ya se comentó que grandes masas de rocas (como cordilleras, montañas y volcanes) pueden alterar también el vector de gravedad local. La tabla 2.3 muestra densidades para diferentes materiales que componen la superficie terrestre (adaptadas de [Torge, 1991]), mientras que la figura 2.14 presenta una gráfica que muestra (de manera muy exagerada) la forma del geoide en el hemisferio que contiene Europa y África.

Material	Densidad ( $kg/m^3$ )
Agua	1030
Sedimentos	2000 a 2500
Granito	2500 a 2800
Flujos de lava	2700
Basalto	2700 a 3100
Peridotita	3300 a 3400

Tabla 2.3: Densidades relativas de materiales de la superficie terrestre.

Si bien el geoide es una superficie compleja, es posible *aproximarse* a la expresión

<sup>11</sup>Recuerde que el altímetro (un importante instrumento para la navegación aérea) lo que hace es medir presiones atmosféricas, y que éstas a su vez dependen del nivel medio del mar.

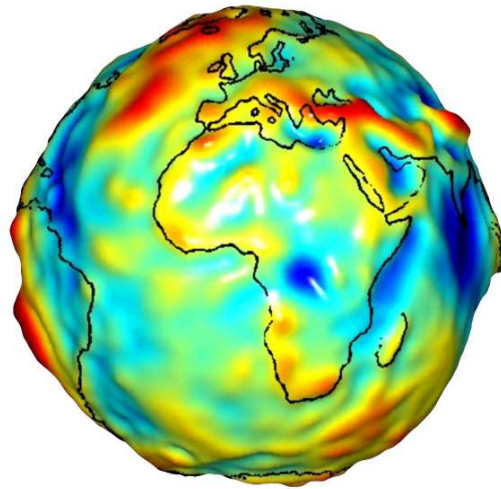


Figura 2.14: Geoide en Europa y África. Fuente: Misión GRACE (NASA).

del potencial gravitatorio de la Tierra (de donde el geoide se deriva) mediante un *desarrollo en serie en esféricos armónicos*<sup>12</sup> (para mayores detalles consulte [Wikipedia, 2006g] y [Wikipedia, 2006o]).

Por otro lado, es posible relacionar matemáticamente al geoide y el elipsoide mediante la expresión:

$$h = H + N \quad (2.6)$$

Donde  $h$  es la altura de un punto con respecto al elipsoide (*altura elipsoidal*),  $N$  es la altura del geoide respecto al elipsoide (*ondulación del geoide*) y  $H$  es la altura del punto con respecto al geoide (llamada *altura ortométrica*). La figura 2.15 muestra esta relación.

Note que tanto  $h$  como  $N$  son perpendiculares al elipsoide de referencia, mientras que  $H$  es la altura medida a lo largo de la *línea de plomada* (perpendicular al geoide y cuya curvatura ha sido exagerada en la figura).

Mediante esta relación, y con la ayuda de las series en esféricos armónicos mencionadas previamente, es posible escribir programas que aproximen los valores del geoide. Un ejemplo de ello es el proporcionado por la National Geospatial-Intelligence Agency (NGA) (ver [NGA, 2006b] y [NGA, 2006a]), donde se rela-

<sup>12</sup>Los coeficientes de esta serie son muy importantes para determinar la órbita de los satélites artificiales. Por ejemplo, el coeficiente  $C_{20}$  produce en los satélites GPS una desviación en la órbita de 2 km en 3 horas ([Hernandez-Pajares et al., 2001])

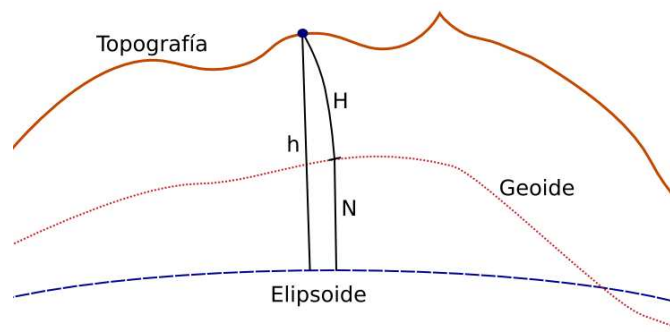


Figura 2.15: Relación entre el Geoide y el Elipsoide

ción del geoide con el elipsoide WGS-84.

La tabla 2.4 presenta los valores de  $N$  (ondulación del geoide) para algunas ciudades del mundo según el *NGA WGS 84 Geoid Calculator* ([NGA, 2006a]).

<i>Ciudad</i>	$N$ (m)
Barcelona	48,61
Berlín	39,79
Buenos Aires	14,34
Lahore	-43,60
Londres	47,37
Madrid	53,44
Quito	26,13
Seattle	-19,38
Singapur	7,03
Tel Aviv	17,30

Tabla 2.4: Ondulación del geoide para algunas ciudades.

## 2.4. Sistemas de coordenadas terrestres

Ubicar un punto en el espacio significa saber su *posición*, entendida ésta como la separación (medida como distancia o ángulos) que existe entre el punto dado y puntos o ejes de referencia predeterminados.

Surge entonces la necesidad de asignar dichas referencias de manera formal, lo que define un sistema de referencia. Hay muchas maneras diferentes de definir las referencias, principalmente en función del uso que se le dará, y es por esa

razón que hay diferentes sistemas de referencia.

En la siguientes secciones se presentan algunos sistemas utilizados para ubicar los puntos con respecto a la superficie terrestre, denominados sistemas de referencia terrestres o sistemas de coordenadas terrestres.

### 2.4.1. ECEF

El sistema denominado ECEF es un sistema de coordenadas Cartesiano muy utilizado en GPS que, como su nombre lo indica, está centrado en la Tierra y rota fijado a su superficie. También es llamado Conventional Terrestrial System (CTS).

Las características principales del sistema ECEF son:

- Utiliza coordenadas tridimensionales en los ejes  $\vec{X}$ ,  $\vec{Y}$ ,  $\vec{Z}$ , habitualmente expresadas en metros.
- Su centro es el centro de masas de la Tierra.
- El eje  $\vec{Z}$  coincide con el eje de rotación de la Tierra convencional. Como se verá más adelante, el eje de rotación terrestre tiene pequeñas variaciones a lo largo del tiempo con respecto a la superficie de la Tierra (el polo norte geográfico se mueve). Por esa razón, se definió el Conventional International Origin (CIO) como la definición estándar para el polo norte.
- El eje  $\vec{X}$  viene dado por la intersección entre el Meridiano de Greenwich y el plano que pasa por el centro de masas de la Tierra y es ortogonal al eje  $\vec{Z}$ <sup>13</sup>.
- El eje  $\vec{Y}$  está definido por la dirección que es perpendicular a los dos ejes anteriores y su sentido es tal que:

$$\vec{X} \times \vec{Y} = \vec{Z}$$

Es decir,  $\vec{Z}$  es el producto vectorial de  $\vec{X}$  e  $\vec{Y}$ , y el sistema está orientado a derechas<sup>14</sup>.

<sup>13</sup> Este plano define al ecuador al intersectar la superficie terrestre

<sup>14</sup> Un *sistema a derechas* es tal que, al aplicar la regla de la mano derecha a los vectores  $\vec{X}$  e  $\vec{Y}$ , el pulgar apunta en la dirección de  $\vec{Z}$ . Si apunta en sentido contrario, se dice que el sistema es a *izquierdas*. Esta diferencia es importante a la hora de realizar operaciones vectoriales en uno u otro sistema, pues el signo del resultado puede variar.



La figura 2.16 representa el sistema ECEF.

Es posible que Ud. escuche hablar sobre *sistemas de referencia* y *marcos de referencia*. Los primeros pueden verse como una "definición teórica", mientras que los segundos implican que se han hecho las observaciones pertinentes para definir los parámetros necesarios (posición del polo, ubicación del centro de masas, etc.).

Debido a que estos parámetros pueden cambiar con el tiempo, los marcos de referencia habitualmente vienen asociados a su año de definición. Por ejemplo, el International Terrestrial Reference Frame (ITRF) tiene las versiones ITRF94, ITRF96, ITRF97 e ITRF2000 [ITRF, 2006].

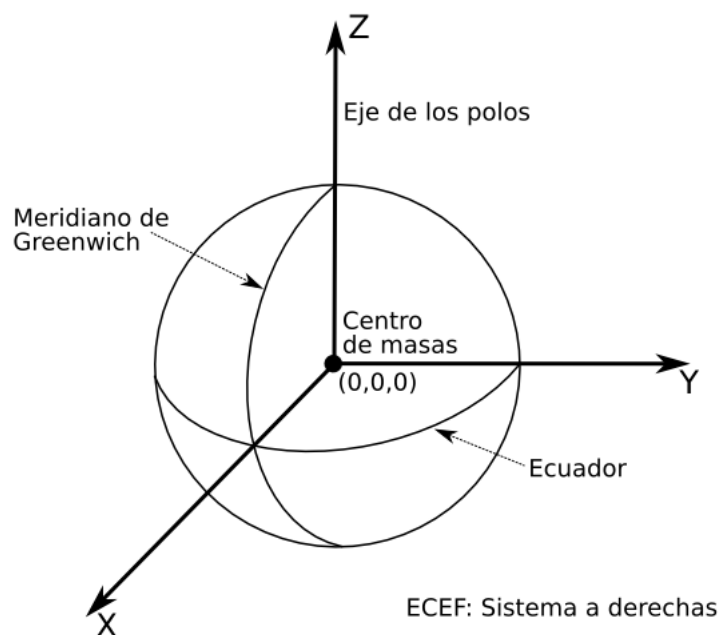


Figura 2.16: Sistema ECEF

### Matrices de rotación

A menudo es necesario convertir de un sistema a otro mediante rotaciones alrededor de los ejes de coordenadas. Un ejemplo de esto es cuando en un momento dado representamos la posición de un satélite artificial en el sistema ECEF. Un tiempo después  $t'$ , la posición del satélite habrá variado debido al movimiento en su órbita, *pero también la Tierra habrá rotado*, de modo que

tendremos un nuevo sistema  $ECEF'$ , que *no es igual* al sistema  $ECEF$  inicial (ver figura 2.17).

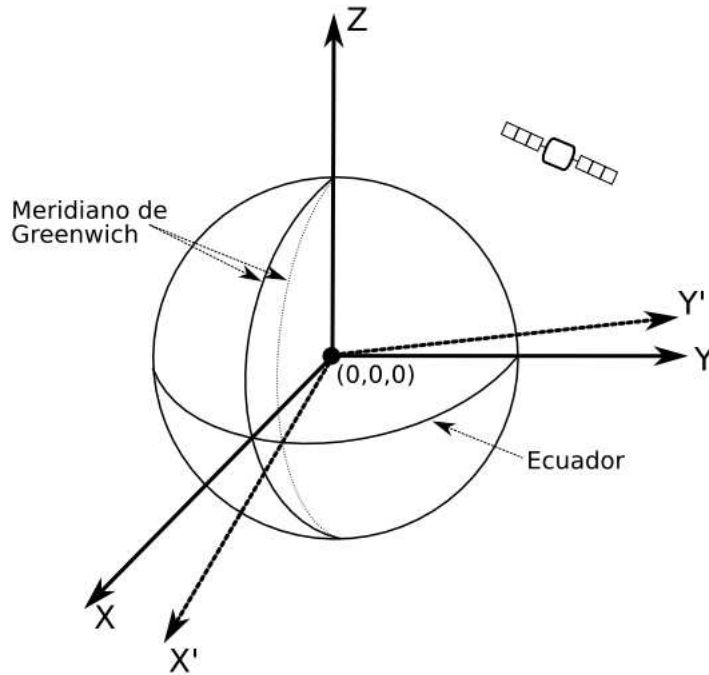


Figura 2.17: Rotación del sistema ECEF

Es por esto que debemos convertir las coordenadas del satélite a un sistema común para conocer cómo se movió en realidad. En este ejemplo, si tenemos el tiempo transcurrido y conocemos la velocidad angular de rotación de la Tierra<sup>15</sup>), sabremos el ángulo con el cual difieren ambos sistemas (note que la rotación sólo sucede alrededor del eje  $\vec{Z}$ ).

La figura 2.18 ilustra la rotación alrededor del eje  $\vec{Z}$  del sistema  $XY$  en  $X'Y'$ . Note que la distancia  $r$  desde el origen al punto  $P$  es igual en ambos sistemas, de modo que las respectivas coordenadas  $(x, y)$  y  $(x', y')$  se pueden escribir:

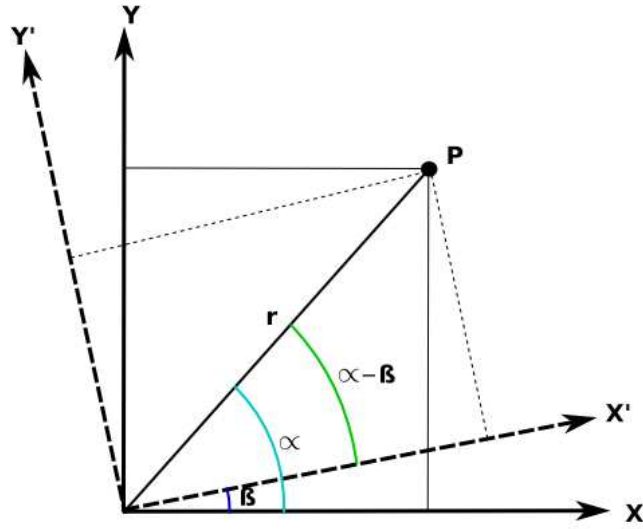
$$x = r \cos \alpha$$

$$y = r \sin \alpha$$

$$x' = r \cos(\alpha - \beta)$$

$$y' = r \sin(\alpha - \beta)$$

<sup>15</sup>Ver tabla 2.2.

Figura 2.18: Rotación alrededor del eje  $\vec{Z}$ 

Por otra parte, tomando en cuenta las expresiones para diferencias de ángulos:

$$\begin{aligned} x' &= r \cos(\alpha - \beta) = r(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \rightarrow \\ x' &= r \cos \alpha \cos \beta + r \sin \alpha \sin \beta \rightarrow \end{aligned}$$

$$x' = x \cos \beta + y \sin \beta \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} y' &= r \sin(\alpha - \beta) = r(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) \rightarrow \\ y' &= r \sin \alpha \cos \beta - r \cos \alpha \sin \beta \rightarrow \end{aligned}$$

$$y' = -x \sin \beta + y \cos \beta \quad (2.8)$$

Las ecuaciones 2.7 y 2.8 se pueden escribir de manera matricial así:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

La expresión 2.9 determina la rotación en dos dimensiones. Para obtener la expresión tridimensional basta saber que en este caso la rotación es exclusivamente alrededor del eje  $\vec{Z}$  y por tanto las coordenadas  $z$  se mantienen constantes. Entonces la rotación alrededor de  $\vec{Z}$  es:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Siguiendo un procedimiento semejante se pueden deducir las expresiones de rotación alrededor de  $\vec{X}$  e  $\vec{Y}$ . Como a los ejes coordenados  $\vec{X}$ ,  $\vec{Y}$ ,  $\vec{Z}$  se les suele denotar como 1, 2 y 3, a las matrices de rotación correspondientes se les llama  $\mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{R}_2$  y  $\mathbf{R}_3$ :

$$\mathbf{R}_1(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{R}_2(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{R}_3(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

La convención para el signo de  $\beta$  es muy importante: el ángulo será positivo cuando la rotación alrededor del eje se realiza en el sentido de la regla de la mano derecha. Por ello en la figura 2.18 se consideraba la rotación como positiva.

En general, la rotación de un sistema de coordenadas  $p$  a otro sistema  $q$  se puede expresar como:

$$\mathbf{x}_q = \mathbf{R}_p^q \mathbf{x}_p \quad (2.14)$$

Donde  $\mathbf{x}_q$  es el vector definido en el sistema  $q$ ,  $\mathbf{x}_p$  es el vector definido en el sistema  $p$ , y  $\mathbf{R}_p^q$  es la matriz de rotación que convierte de  $p$  a  $q$ .

Las matrices de rotación así definidas son ortogonales y tienen por tanto unas importantes propiedades:

- Si  $\mathbf{R}_p^q$  convierte de  $p$  en  $q$ , entonces  $\mathbf{R}_p^{qT}$  convierte de  $q$  en  $p$  (es decir,  $\mathbf{R}_p^{qT} = \mathbf{R}_q^p$ ).
- El determinante es 1 ( $\det(\mathbf{R}_p^q) = 1$ ).
- $\mathbf{R}_p^{qT} \mathbf{R}_p^q = \mathbf{R}_p^q \mathbf{R}_p^{qT} = \mathbf{I}$ , donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad.
- $\mathbf{R}_p^{q^{-1}} = \mathbf{R}_p^{qT}$ .
- Cualquier rotación de  $p$  en  $q$  se puede realizar mediante la composición de rotaciones sucesivas alrededor de los ejes 1, 2 y 3 (en ese orden):

$$\mathbf{R}_p^q = \mathbf{R}_3(\beta_3) \mathbf{R}_2(\beta_2) \mathbf{R}_1(\beta_1)$$

### Matrices de rotación para ángulos pequeños

En ocasiones sucede que el ángulo de rotación a aplicar es pequeño (menor a  $10^\circ$ ). Si es ese el caso, es posible aprovechar las siguientes aproximaciones (válidas sólo para ángulos expresados en radianes):

$$\sin \epsilon \simeq \epsilon$$

$$\cos \epsilon \simeq 1$$

Entonces, las matrices de rotación se podrán escribir así:

$$\mathbf{R}_1(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & -\beta & 1 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

$$\mathbf{R}_2(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{R}_3(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & \beta & 0 \\ -\beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

### Matrices de reflexión

Es posible que para un sistema de coordenadas dado nos interese cambiar el sentido en que apunta alguno o varios de sus ejes. Esto se puede lograr utilizando las llamadas *matrices de reflexión*, que son variaciones de la matriz identidad pero que cambian de signo las coordenadas del eje de interés:

$$\mathbf{S}_1(\beta) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

$$\mathbf{S}_2(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

$$\mathbf{S}_3(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

### 2.4.2. LLA

En este caso, el sistema utilizado consiste en dividir la superficie terrestre en una cuadrícula imaginaria formada por los paralelos y meridianos. Dado que la superficie del geoide es bidimensional, hacen falta al menos dos parámetros para especificar la posición. Tales parámetros son llamados *latitud* y *longitud*.

#### Latitud

La latitud es el parámetro que determina cuán hacia el norte o hacia el sur se encuentra ubicado el punto. La referencia óptima para esta medición es el ecuador, y por tanto a éste se le asigna latitud  $0^\circ$ .

Por otra parte, a cada uno de los polos se le asigna la latitud  $90^\circ$  (N - norte o S - sur, dependiendo del que se trate. También es posible denotar las latitudes al sur con un signo negativo). Estos  $90^\circ$  corresponden al ángulo que forma el polo con el centro de la tierra y el ecuador. Por tanto, la latitud tiene un rango de  $0^\circ$  a  $90^\circ$  (un cuarto de esfera terrestre).

Los paralelos, al serlo con respecto al ecuador, representan planos de latitud fija. Por ello se puede hablar del "paralelo  $55^\circ$ ".

Algunos paralelos notables que hemos mencionado previamente son:

- *Trópico de Cáncer*: latitud  $23^\circ 27'$  N.
- *Trópico de Capricornio*: latitud  $23^\circ 27'$  S.
- *Círculo Polar Ártico*: latitud  $66^\circ 33'$  N.
- *Círculo Polar Antártico*: latitud  $66^\circ 33'$  S.

En la navegación tradicional, la latitud ha sido un parámetro relativamente sencillo de obtener. Justo sobre el polo norte se encuentra una estrella relativamente brillante llamada *Polaris* o *Estrella Polar*.

Dado que *Polaris* se encuentra alineada con el eje de rotación de la Tierra, su posición permanece invariable durante la noche, consistiendo en un buen punto de referencia en una noche clara.

Como se muestra en la figura 2.19, la elevación de *Polaris* sobre el horizonte será función de la latitud del navegante<sup>16</sup>. Utilizando entonces un instrumento para medir elevaciones (como por ejemplo el *sextante*<sup>17</sup>), es posible determinar la latitud. En la figura 2.20 se aprecia uno de estos dispositivos (ver figura 2.21 para un ejemplo del hermano más pequeño del sextante: el *octante*).

Es necesario agregar que, en realidad, para encontrar la latitud con este método se puede utilizar cualquier cuerpo celeste del cual se sepa su *declinación*<sup>18</sup> en un momento dado, incluyendo el Sol.

<sup>16</sup>En este esquema se ha colocado a *Polaris* varias veces para indicar que, al quedar muy lejos comparado con el radio de la Tierra, sus rayos llegan paralelos.

<sup>17</sup>Llamado así porque su escala es de un sexto de círculo.

<sup>18</sup>Cuán hacia el norte o hacia el sur del ecuador celeste se encuentra el cuerpo.

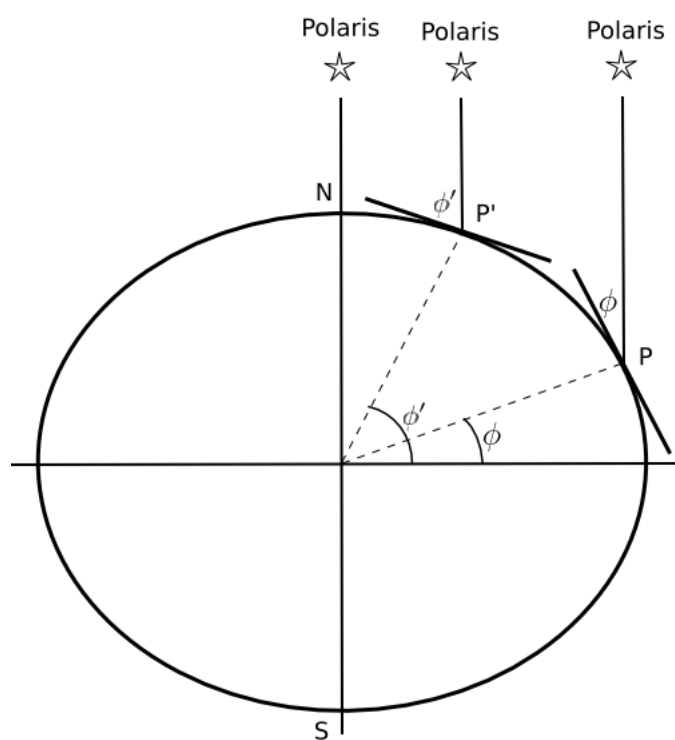


Figura 2.19: Elevación de Polaris en función de la latitud



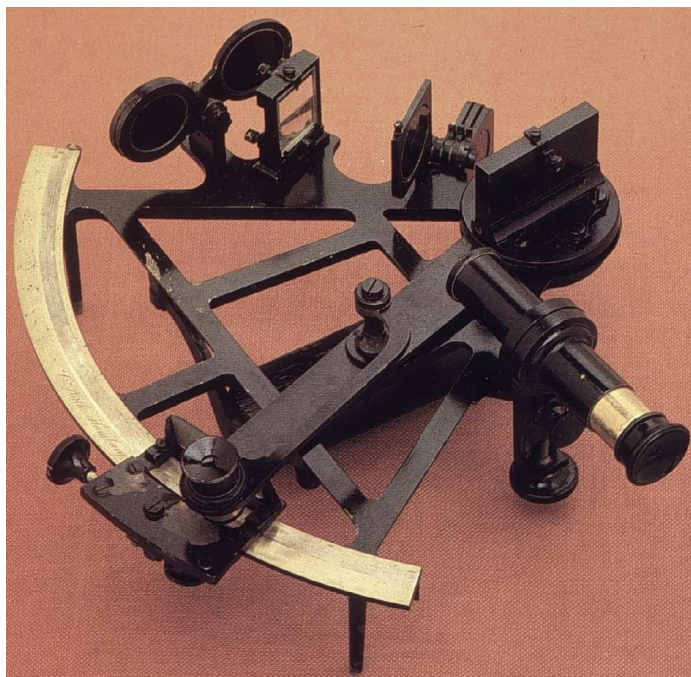


Figura 2.20: Sextante. Fuente: Wikipedia



Figura 2.21: Octante. Fuente: Georges Jansoone. Wikimedia Commons

## Longitud

La longitud indica cuán hacia el este o el oeste se encuentra el punto de interés. A diferencia de la latitud, no existe una referencia natural para esta dimensión. Por ello, un acuerdo internacional escogió a la ciudad de Greenwich, en Inglaterra, como punto de referencia (longitud  $0^\circ$ ).

Los meridianos representan entonces planos con longitud constante, y el meridiano de referencia ( $0^\circ$ ) es llamado *Meridiano de Greenwich*, pues es el que pasa por la mencionada ciudad.

El rango de longitud posible es (a diferencia de la latitud) media esfera, y por ende  $180^\circ$ . De este modo, las longitudes al este del meridiano de Greenwich se denotan con E, y al oeste con W (de *West*, en inglés). También es posible denotar las longitudes al oeste con un signo negativo. Adicionalmente, cada meridiano tiene su *antimeridiano*, que es el que se encuentra a  $180^\circ$ .

En navegación, el problema de encontrar la longitud fue durante mucho tiempo sinónimo del problema de conocer con precisión la hora a bordo del barco. Como en la longitud no hay un punto de referencia natural (todos los cuerpos celestes giran de este a oeste), arbitrariamente se tomaba uno, que habitualmente era la principal base naval de la flota en cuestión<sup>19</sup>. Mientras se estaba en la base se sincronizaba el reloj del barco para que, cuando el Sol estuviera en su punto más alto en el cielo (o lo que es lo mismo, cruzara el *meridiano* correspondiente al punto de referencia), el reloj marcara las 12:00 del mediodía.

Como muestra la figura 2.22, si a partir de allí el barco zarpaba hacia el Este, a las 12:00 (hora del barco) el Sol ya habría pasado el meridiano del lugar, mientras que si zarpaba hacia el Oeste, el Sol todavía no habría llegado a su punto culminante. De esa manera era posible estimar la longitud propia con respecto a la referencia. Por ejemplo, dado que un día completo tiene 24 horas, y un círculo  $360^\circ$ , un retraso del Sol de 1 hora significaría  $15^\circ$  de longitud hacia el Oeste<sup>20</sup>.

Este método tenía el grave problema de que no existían relojes suficientemente precisos como para mantener la hora de referencia varios días. Por ello, la búsqueda de referencias de tiempo precisas se convirtió en una importantísima carrera tecnológica, con connotaciones políticas, militares y comerciales.

Los países que arrastraban el peso de la Inquisición arrancaron con desventaja

---

<sup>19</sup>Inglaterra tomaba Londres, Portugal a Lisboa, la referencia de España era la base en San Fernando en Cádiz, etc.

<sup>20</sup>Es importante enfatizar que éste no es el único método, pero otros métodos inventados en la época eran difíciles de llevar a la práctica.

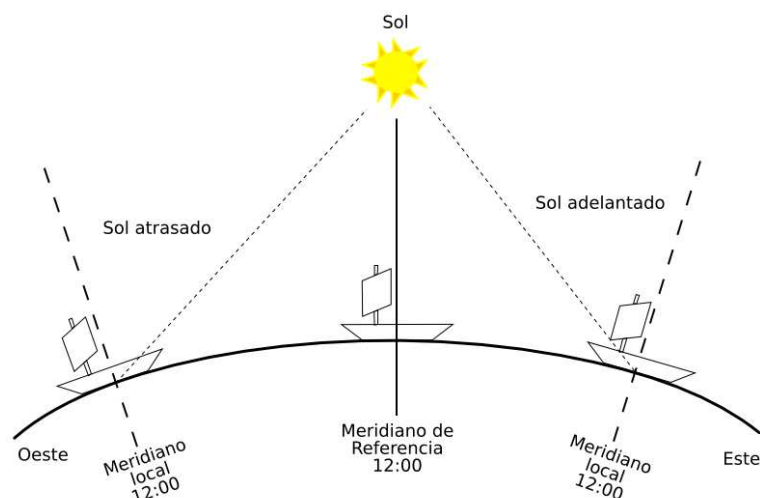


Figura 2.22: Variación de la posición del Sol según la longitud

en esta carrera. Galileo Galilei en Italia se valió del telescopio para descubrir las cuatro lunas mayores de Júpiter, cuyos eclipses periódicos podían ser utilizados como “reloj celestial”<sup>21</sup>. No obstante, tuvo que retractarse de sus descubrimientos bajo amenaza de muerte, y los países católicos no se pudieron valer de esta técnica.

Por otra parte, los expatriados que huían de la Inquisición encontraron un refugio en Holanda (de allí salieron las lentes que utilizó Galileo). Científicos e inventores podían trabajar con relativa libertad y allí Christiaan Huygens inventó en 1656 el reloj de péndulo (basándose en trabajos previos de Galileo), que representó un inmenso avance pues su error era menor a 1 minuto al día<sup>22</sup>.

No obstante, los relojes de péndulo iniciales no eran adecuados para funcionar a bordo de una plataforma en movimiento como lo es un barco. Buscando la hegemonía militar y comercial en el mar, el Parlamento inglés estableció en 1714 el “Premio Longitud”, donde se ofrecían 20.000 libras esterlinas (unos \$2.000.000 a precios actuales) a aquel que diseñara un método para determinar la longitud con menos de medio grado de error en un viaje a América ([Bellis, 2006] y [Wikipedia, 2006m]). El ganador del premio fue *John Harrison*, quien desarrolló un cronómetro marino tan preciso que los responsables del premio tuvieron muchos problemas para creer que era cierta su exactitud (diez veces mejor que lo requerido, según [Bellis, 2006] y [Wikipedia, 2006j]).

Eventualmente, el cronómetro marino de Harrison ayudó a la armada inglesa a

<sup>21</sup>Método apropiado para calcular la longitud con exactitud al poner pie en tierra, pero impráctico a bordo de un barco.

<sup>22</sup>Refinamientos posteriores redujeron este valor a unos 10 segundos al día ([Bellis, 2006])

crear el vasto imperio “donde no se ponía el Sol”.

Para finalizar esta sección, la tabla 2.5 presenta algunos ejemplos de coordenadas de ciudades y lugares alrededor del mundo:

<i>Nombre</i>	<i>Latitud</i>	<i>Longitud</i>
Barcelona (España)	41,30 N	2,09 E
Barrow, Alaska (EEUU)	71,33 N	156,00 W
Beijing (China)	39,92 N	116,38 E
Buenos Aires (Argentina)	34,33 S	58,5 W
Caracas (Venezuela)	10,50 N	66,97 W
Ciudad del Cabo (Suráfrica)	33,80 S	18,47 E
Londres (Inglaterra)	51,50 N	0,12 W
Madrid (España)	40,43 N	3,70 W
Monte Erebus (Antártida)	77,46 S	167,08 E
Moscú (Rusia)	55,75 N	37,62 E
Nueva York (EEUU)	40,75 N	73,99 W
Quito (Ecuador)	0,13 S	78,48 W
Sidney (Australia)	33,92 S	151,28 E
Tokio (Japón)	35,68 N	139,73 E

Tabla 2.5: Coordenadas de algunos lugares de la Tierra

### 2.4.3. Conversión entre ECEF y LLA

La conversión entre los sistemas ECEF y LLA puede realizarse de varias maneras, pero en todo caso siempre hay que tener en cuenta que la forma de referencia utilizada es el elipsoide. Como se indicó en la sección 2.3.1, el elipsoide es adecuado en lo que se refiere a latitud y longitud, pero la altitud obtenida con esta aproximación debe corregirse (ver la sección 2.3.2).

Por otra parte, hay una gran diferencia entre la *latitud geodética* y la *latitud geocéntrica*, como muestra la figura 2.23. Si la Tierra fuera una esfera, la latitud geocéntrica  $\phi'$  sería la utilizada para navegar, pero al utilizar la aproximación elipsoidal, la correcta es la latitud geodética  $\phi$ . Por ello, la conversión entre los sistemas ECEF y LLA no es simplemente un cambio de coordenadas polar-rectangular.

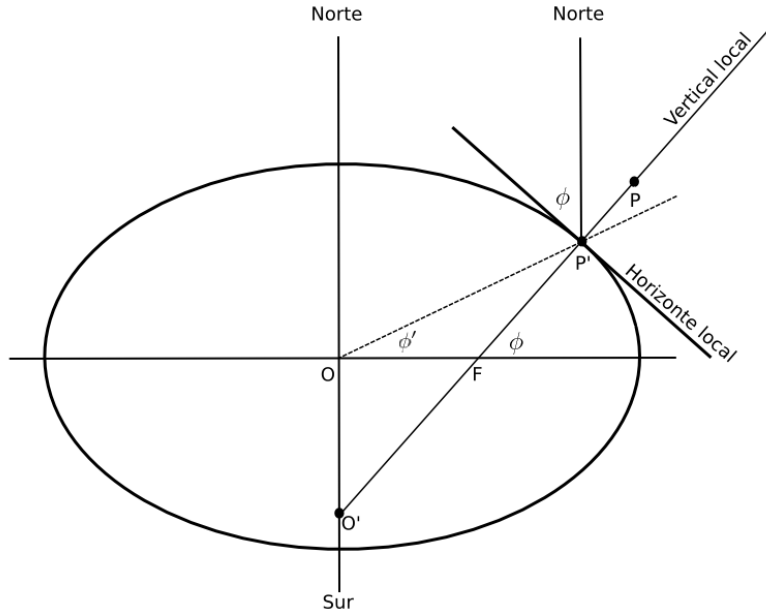


Figura 2.23: Latitudes geodética y geocéntrica

### LLA a ECEF

Las siguientes expresiones permiten convertir de LLA a ECEF cuando las unidades utilizadas son metros. La ecuación 2.21 permite calcular el radio de curvatura de la Tierra  $N$  a una latitud  $\phi$  dada a partir de los parámetros del elipsoide.

Nótese que dicho radio de curvatura se define, según la figura 2.23, como la distancia desde el punto  $P'$  (la proyección en el elipsoide del punto de interés  $P$ ) hasta el punto  $O'$  (la intersección de un vector perpendicular al horizonte local con el eje "Norte-Sur"). Asimismo, la altura elipsoidal  $h$  es la distancia entre los puntos  $P$  y  $P'$ .

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}} \quad (2.21)$$

Con este dato, es posible realizar las conversiones correspondientes:

$$X = (N + h) \cos \phi \cos \beta \quad (2.22)$$

$$Y = (N + h) \cos \phi \sin \beta \quad (2.23)$$

$$Z = \left( \frac{b^2}{a^2} N + h \right) \sin \phi \quad (2.24)$$

Donde  $\phi$  es la latitud,  $\beta$  es la longitud, y  $h$  es la altura sobre el elipsoide (en metros), como se indicó previamente.

### ECEF a LLA

La conversión de ECEF a LLA es más compleja. Existen varias maneras de hacerlo, pero una de las más simples es mediante un procedimiento iterativo:

1. Calcular la longitud  $\beta$  y el valor auxiliar  $p$ :

$$\beta = \arctan \left( \frac{Y}{X} \right)$$

$$p = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

2. Hacer una primera estimación de la latitud  $\phi$  asumiendo la altura elipsoidal como *cero* metros:

$$\phi_0 = \arctan \left( \frac{Z}{p(1 - e^2)} \right)$$

3. Utilizar la estimación anterior para calcular la posición:

Primero, estimar cuál es el radio de curvatura de la Tierra ( $N_i$ ) para la estimación anterior<sup>23</sup> de la latitud ( $\phi_i$ ):

$$N_i = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi_i}}$$

Con la información anterior, se hace una mejor estimación de la altura elipsoidal ( $h_{i+1}$ ):

$$h_{i+1} = \frac{p}{\cos \phi_i} - N_i$$

---

<sup>23</sup>Si es la primera vez que se hace esta iteración, obviamente se utiliza  $\phi_0$ .

Con el nuevo valor de la altura elipsoidal ( $h_{i+1}$ ), mejorar la estimación de la latitud ( $\phi_{i+1}$ ):

$$\phi_{i+1} = \arctan \left( \frac{Z}{p(1 - e^2 \frac{N_i}{N_i + h_{i+1}})} \right)$$

4. El paso anterior se repite hasta alcanzar un nivel de convergencia deseado (por ejemplo, cuando  $|h_{i+1} - h_i| < 0,001m$ ).

#### 2.4.4. Sistema de coordenadas local

En ocasiones es necesario referir un punto con respecto a otro que se encuentra en o cerca de la superficie terrestre. Un sistema de este tipo puede definirse en cualquier lugar, con tal y las coordenadas del punto de referencia (punto de origen) sean conocidas.

En la figura 2.24 se presenta un esquema que relaciona al sistema ECEF con un sistema de coordenadas local NED (Norte-Este-Abajo) centrado en el punto  $P$ . Este es un sistema *a derechas*, donde  $\vec{n}\vec{x}\vec{e} = \vec{d}$ .

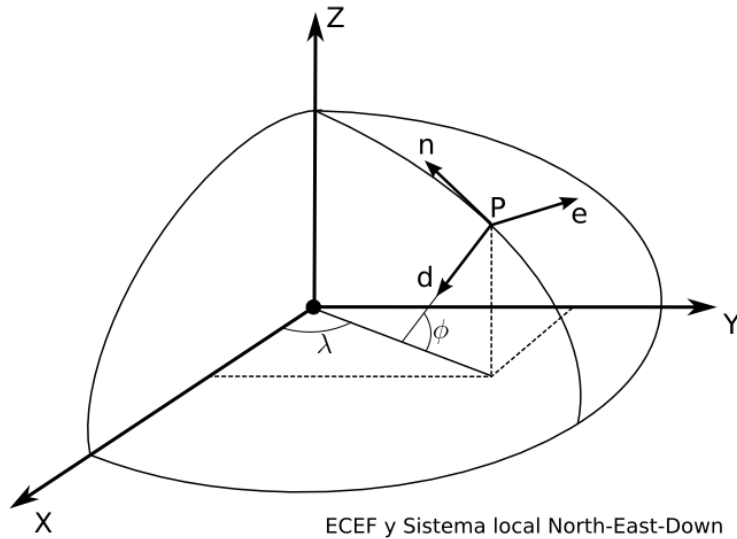


Figura 2.24: Sistemas ECEF y NED

Para convertir las coordenadas de un punto  $B$  dadas en el sistema de coordenadas local al sistema ECEF, se utilizan las matrices de rotación adecuadas (ver 2.4.1)

alrededor de  $n$  y  $d$  para hacer la conversión de un sistema a otro. El resultado es la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \phi \cos \lambda & -\sin \lambda & -\cos \phi \cos \lambda \\ -\sin \phi \sin \lambda & \cos \lambda & -\cos \phi \sin \lambda \\ \cos \phi & 0 & -\sin \phi \end{pmatrix} \begin{bmatrix} n \\ e \\ d \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Por otro lado, para muchas aplicaciones locales es más natural utilizar un sistema de coordenadas local NEU (Norte-Este-Arriba), centrado en el mismo punto. Tal sistema se representa en la figura 2.25. Note que el sistema NEU es un sistema *a izquierdas*, donde  $\vec{n} \times \vec{e} = -\vec{u}$ . Por ello, se aplica la misma expresión 2.25, pero modificada por la adecuada matriz de reflexión  $d \rightarrow u$  (ver 2.4.1).

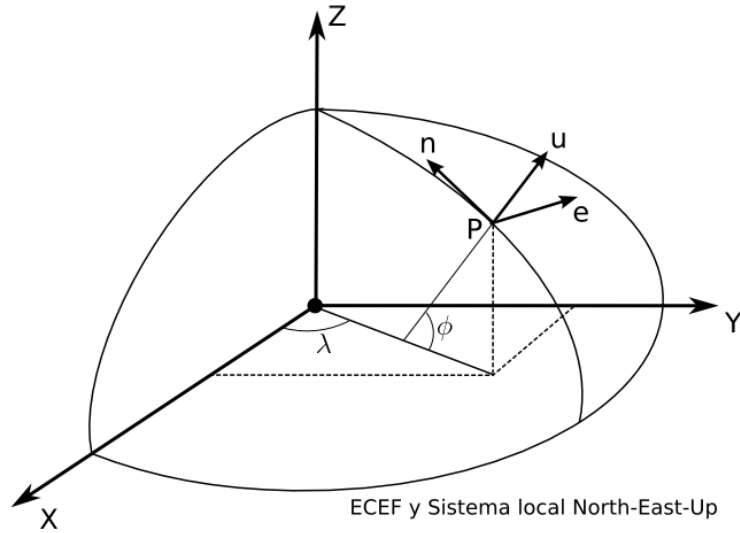


Figura 2.25: Sistemas ECEF y NEU

#### 2.4.5. El datum geodético

Como se comentó previamente (ver sección 2.3.1), un elipsoide global aproxima bien la forma de la Tierra en su conjunto y es razonablemente preciso en lo que se refiere a las coordenadas en latitud y longitud. No obstante, es posible construir un *elipsoide local* que minimice, en una determinada área, las diferencias en altura entre el geoide y dicho elipsoide local.

Entonces, el conjunto de parámetros que describen la relación entre un elipsoide local y un sistema global de referencia es llamado el *datum geodético*, o sim-



plemente el *datum* ([Seeber, 1993]).

Los parámetros básicos que definen a un datum son:

- El semieje mayor  $a$  del elipsoide de referencia.
- El factor de achatamiento  $f$  del mismo elipsoide.
- Las coordenadas de traslación del origen del elipsoide local con respecto al centro de masas de la Tierra:  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$ .

Cuando las coordenadas  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$  son iguales a cero se dice que se está hablando de un *datum absoluto*. Un ejemplo de esto es el *Geodetic Reference System 1980* (GRS 1980)<sup>24</sup>.

Por otro lado, a menudo es necesario realizar además una rotación de los ejes del elipsoide y una corrección de escala para lograr una concordancia más perfecta entre el elipsoide local y el geoide, como muestra la figura 2.26. Por ello, un transformación completa del datum entre dos sistemas cartesianos a menudo implica, al menos, siete parámetros ([Seeber, 1993]):

- 3 traslaciones  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$ .
- 3 rotaciones  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\epsilon_z$ .
- 1 factor de escala  $m$ .

Como las rotaciones a menudo son pequeñas (vea la sección 2.4.1), la expresión de transformación queda así:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix}_{1,2} + (1 + m) \begin{pmatrix} 1 & \epsilon_z & -\epsilon_y \\ -\epsilon_z & 1 & \epsilon_x \\ \epsilon_y & -\epsilon_x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_1 \quad (2.26)$$

En la tabla 2.6 (adaptada de [ $\mu$ -blox ag., 1999]) se pueden encontrar los parámetros de cambio para algunos datum comunes

Los parámetros sobre los elipsoides de referencia pueden encontrarse en la tabla 2.1.

---

<sup>24</sup>Ver tabla 2.1.

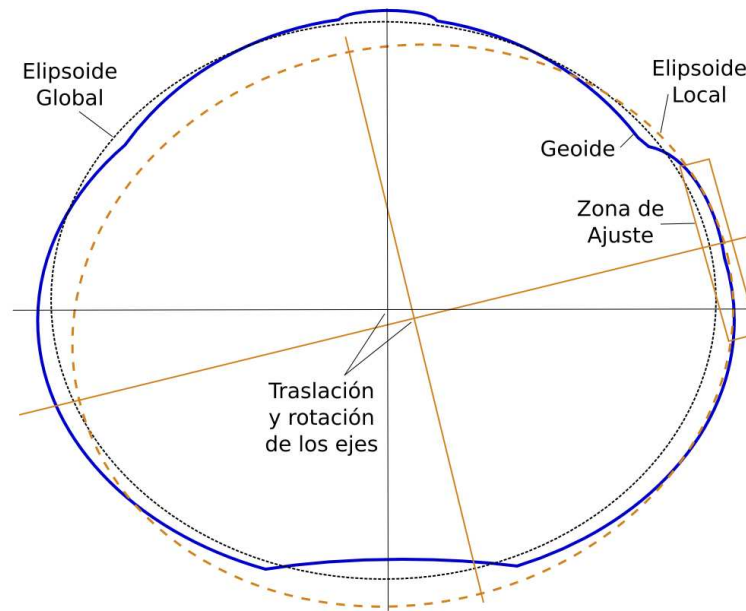


Figura 2.26: Aproximación al geoide con un elipsoide local

<i>Datum</i>	<i>Elipsoide de referencia</i>	$D_x$ (m)	$D_y$ (m)	$D_z$ (m)
<i>Australian Geodetic 1984</i>	Australian National	-134	-48	149
<i>El Cabo - Suráfrica</i>	Clarke 1880	-136	108	-292
<i>Cabo Cañaveral, Florida</i>	Clarke 1866	-2	151	181
<i>Europeo 1950 - España, Portugal</i>	International 1924	-84	-107	-120
<i>Europeo 1950 - Tunez</i>	International 1924	-112	-77	-145
<i>Indio - India, Nepal</i>	Everest 1956	295	736	257
<i>Norte América 1927 - Centro América</i>	Clarke 1866	0	125	194
<i>Norte América 1927 - Este del Mississippi</i>	Clarke 1866	-9	161	179
<i>Norte América 1927 - Méjico</i>	Clarke 1866	-12	130	190
<i>Norte América 1927 - Oeste del Mississippi</i>	Clarke 1866	-8	159	175
<i>Norte América 1983 - Centro América, Méjico</i>	GRS 1980	0	0	0
<i>Pico de las Nieves - Islas Canarias</i>	International 1924	-307	-92	127
<i>SGS 85 - Soviet Geodetic System 1985</i>	S85	3	9	-9
<i>Sur América 1969 - Argentina</i>	South American 1969	-62	-1	-37
<i>Sur América 1969 - Brasil</i>	South American 1969	-60	-2	-41
<i>Sur América 1969 - Venezuela</i>	South American 1969	-45	8	-33
<i>Tokio - Japón</i>	Bessel 1841	-148	507	685
<i>Definición Global WGS 1984</i>	WGS 84	0	0	0

Tabla 2.6: Parámetros de algunos datum comunes

## 2.5. Sistemas de coordenadas celestes

Así como hay referencias adecuadas para ubicar puntos sobre la superficie terrestre, hay otros más apropiados para puntos en el espacio. Dada la tendencia en la navegación actual a utilizar satélites artificiales como referencias, es importante conocer los sistemas de coordenadas asociados.

### 2.5.1. Conventional Inertial System (CIS)

El sistema denominado Conventional Inertial System (CIS) es un sistema de coordenadas Cartesiano muy utilizado en GPS para representar la posición de los satélites artificiales pertenecientes al sistema.

Lo anterior es debido a que la teoría del movimiento de satélites está desarrollada con respecto a sistemas inerciales (sistemas de referencia que no son sometidos a aceleraciones). En el sentido estricto, el sistema CIS *no* es un sistema inercial porque el centro de masas de la Tierra sufre pequeñas aceleraciones cuando nuestro planeta se mueve alrededor del Sol<sup>25</sup>, razón por la cual a menudo es llamado *cuasi-inercial*.

Las características principales del sistema CIS son:

- Utiliza coordenadas tridimensionales en los ejes  $\vec{X}$ ,  $\vec{Y}$ ,  $\vec{Z}$ , habitualmente expresadas en metros.
- Su centro es el centro de masas de la Tierra.
- El eje  $\vec{X}$  apunta en la dirección del *punto Aries*<sup>26</sup> o equinoccio medio de la época J2000.0<sup>27</sup>.
- El eje  $\vec{Z}$  es perpendicular al ecuador medio en la época J2000.0.
- El eje  $\vec{Y}$  está definido por la dirección que es perpendicular a los dos ejes anteriores y su sentido es tal que:

$$\vec{X} \times \vec{Y} = \vec{Z}$$

<sup>25</sup>Entre otras razones, porque la órbita de la Tierra no es circular, sino elíptica.

<sup>26</sup>Punto en el cielo correspondiente a la intersección de la eclíptica con el ecuador celeste (equinoccio), cuando el Sol pasa del hemisferio sur hacia el norte

<sup>27</sup>La época J2000.0 es el 1ro de Enero del 2000, a mediodía.

La figura 2.27 representa el sistema CIS.

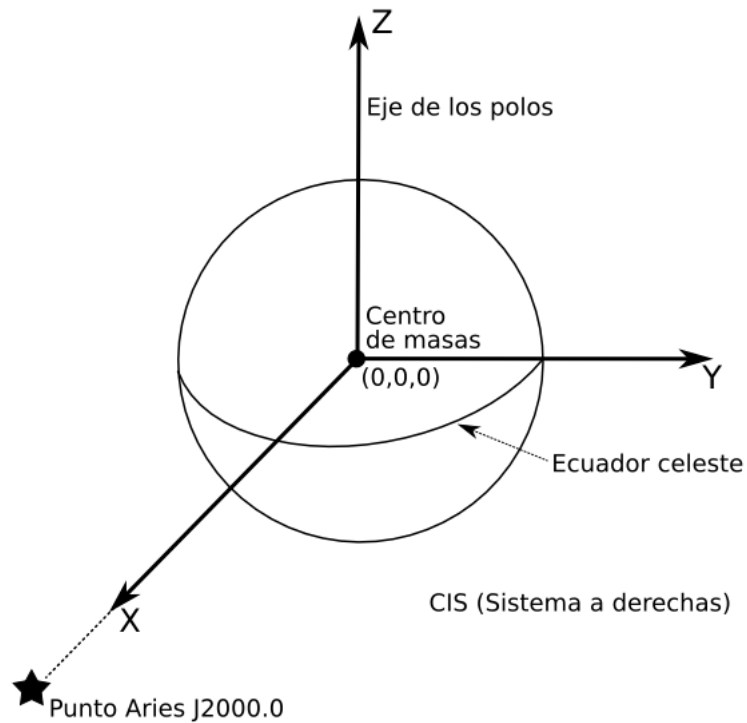


Figura 2.27: Sistema CIS

### 2.5.2. Sistema de coordenadas ecuatorial

El sistema ecuatorial es uno de los sistemas de coordenadas celestes más utilizados. Es semejante al sistema CIS en cuanto se basa en el punto Aries y en el ecuador celeste como referencias, pero en vez de definir un sistema rectangular cartesiano, utiliza dos ángulos para ubicar a un punto en la esfera celeste:

- **Declinación** (dec o  $\delta$ ): es el ángulo medido entre el ecuador celeste y el punto de interés. En este sentido, es equivalente a la latitud del sistema LLA.

La declinación se mide en grados a partir del ecuador celeste, negativo hacia sur y positivo hacia el norte.

- **Ascensión recta** (RA o  $\alpha$ ): la ascensión recta es el equivalente celeste a la longitud del sistema LLA y representa el ángulo entre el punto Aries y la proyección sobre el ecuador celeste del punto a ubicar.

La ascensión recta es también llamada “ángulo horario” dado que se mide en horas, minutos y segundos hacia el este del punto Aries. Hay que recordar que esto implica que una hora de RA es equivalente a  $15^\circ$  de arco (ver sección 2.4.2).

Consulte la figura 2.28 para detalles sobre este sistema de coordenadas.

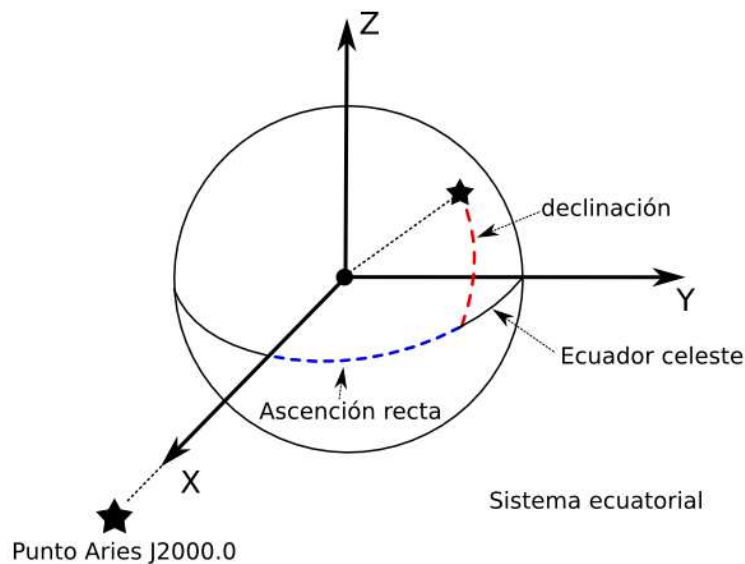


Figura 2.28: Sistema ecuatorial

### 2.5.3. Sistema de coordenadas horizontal

El sistema de coordenadas horizontal se caracteriza porque utiliza el horizonte local del observador como plano de referencia. El punto justo por encima de la cabeza del observador se llama “cenit” (o zenit), mientras que el punto justo a sus pies se llama “nadir”.

Las coordenadas utilizadas en este sistema son:

- **Azimut (Az):** es el ángulo a lo largo del horizonte local entre el norte y el punto  $P$  a ubicar. Se mide positivamente en el sentido horario.
- **Elevación (Elev):** llamada también “altitud sobre el horizonte”, es el ángulo entre el horizonte local y el punto  $P$ .

El esquema presentado en la figura 2.29 ilustra este sistema de referencia, donde  $O$  es la posición del observador sobre la superficie terrestre, y la esfera a su alrededor es la esfera celeste.

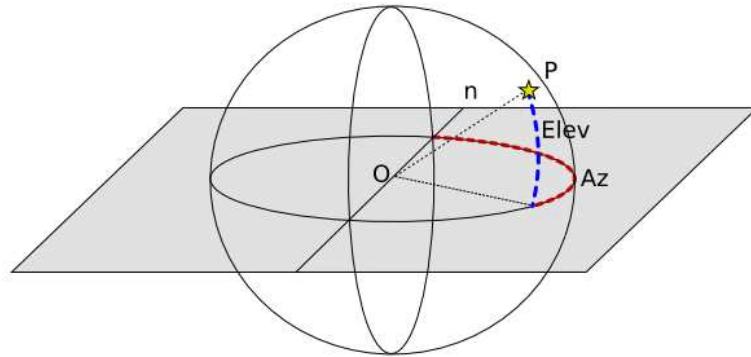


Figura 2.29: Sistemas de coordenadas horizontal

#### 2.5.4. Convirtiendo de ECEF a coordenadas horizontales

A menudo es necesario convertir de coordenadas ECEF a coordenadas horizontales (elevación/azimut).

El ejemplo típico es cuando se tiene la posición de un vehículo (un satélite artificial, por ejemplo), y se desea orientar la antena de un radar de seguimiento colocada en un punto de referencia dado sobre la superficie de la Tierra.

Dicha antena necesita la información de elevación/azimut del satélite (visto desde la posición de la antena) para poder hacer su labor. Una antena de esta naturaleza se puede observar en la Figura 2.30.

Entonces, la conversión de ECEF a elevación/azimut se puede dividir en tres pasos:

1. Conversión desde **ECEF** al sistema de coordenadas local **NED**: *North-East-Down* (Norte-Este-Abajo). Ambos son sistemas a derechas.
2. Conversión desde **NED** a **NEU**: *North-East-Up* (Norte-Este-Arriba). Este último es un sistema a izquierdas.
3. Finalmente, conversión desde **NEU** al correspondiente sistema horizontal **azimut/elevación**.

En las siguientes secciones se explicarán con detalle estos tres pasos.

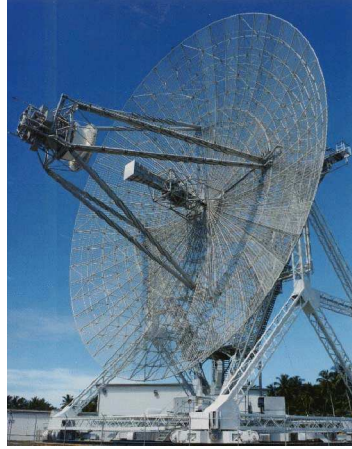


Figura 2.30: Antena de seguimiento por radar (Wikipedia).

Es de hacer notar que hay más de una manera de hacer la conversión entre estos sistemas. La manera explicada en este documento fue elegida por ser completa y relativamente sencilla de seguir.

### ECEF a NED

Lo primero que hay que considerar es que se debe empezar con al menos dos vectores:

- $\vec{P}^s$ : vector que indica la posición del **vehículo** (un satélite, por ejemplo), en el sistema ECEF.
- $\vec{P}_o$ : vector que indica la posición del **observador** (una antena, por ejemplo), en el sistema ECEF.

El observador está colocado en una posición dada de la Tierra, por lo que deben ser conocidas sus coordenadas. Usualmente estas coordenadas están dadas en un formato LLA (Longitud-Latitud-Altura), y por ello deben convertirse a ECEF. Por otro lado, los algoritmos para hallar las coordenadas del satélite habitualmente proporcionan éstas en formato ECEF.

Una vez que se tienen ambos vectores  $\vec{P}^s$  y  $\vec{P}_o$ , lo que nos interesa obtener es el vector de “línea de visión” desde el observador hacia el satélite,  $\vec{P}$ . Este vector se halla simplemente haciendo la substracción de ambos vectores, como indica la Ecuación 2.27.

$$\vec{P} = \vec{P}^s - \vec{P}_o \quad (2.27)$$

$\vec{P}$  es entonces el vector que va desde el observador hasta el satélite, y es a él a quien hay que calcularle la elevación y el azimut. No obstante, las coordenadas de  $\vec{P}$  están dadas en el sistema rectangular ECEF, por lo que es necesario hacer una conversión de sus componentes.

La Figura 2.31 muestra esquemáticamente la relación entre los sistemas ECEF y NED.

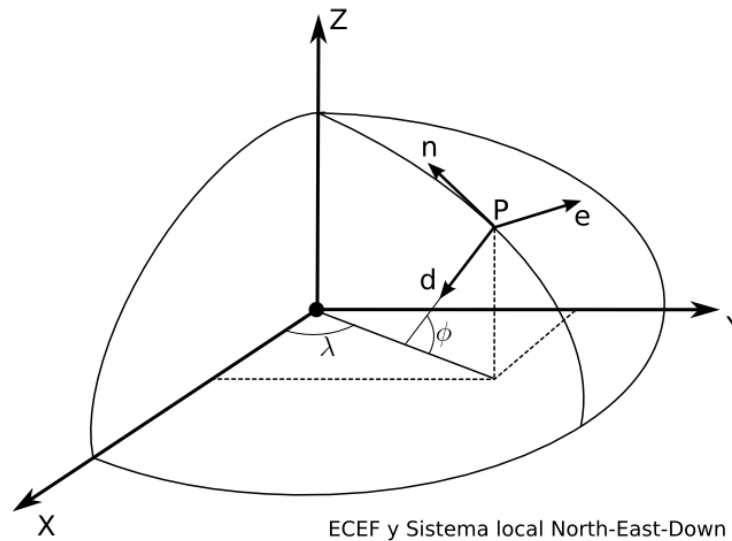


Figura 2.31: Sistemas ECEF y NED.

Entonces, para hacer la conversión entre ambos sistemas, es necesario determinar las matrices de rotación que deben aplicarse para lograr que los ejes de ECEF y NED coincidan tanto en dirección como en sentido.

**Nota importante:** en particular, en esta sección se buscará que el eje  $X$  coincida con el  $N$ , el  $Y$  coincida con el eje  $E$ , y el  $Z$  con el  $D$ .

Empezaremos buscando la coincidencia del eje  $Y$  con el  $E$ . Para ello, si miramos a la Figura 2.31 desde arriba (como si estuviéramos encima del polo norte mirando hacia abajo), tendremos un punto de vista como el mostrado en la Figura 2.32.

Tenga en cuenta que en la Figura 2.32 el eje  $Z$  sale del plano del papel (o pantalla) y le apunta a usted. Es fácil ver en esta figura que para que el eje  $Y$  coincida en dirección y sentido con el eje  $E$  bastará con una rotación alrededor del eje  $Z$  ( $R_3$ ) con ángulo  $\theta$ : Es decir, la longitud del punto de observación (tomada como positiva en dirección este, respetando la convención).



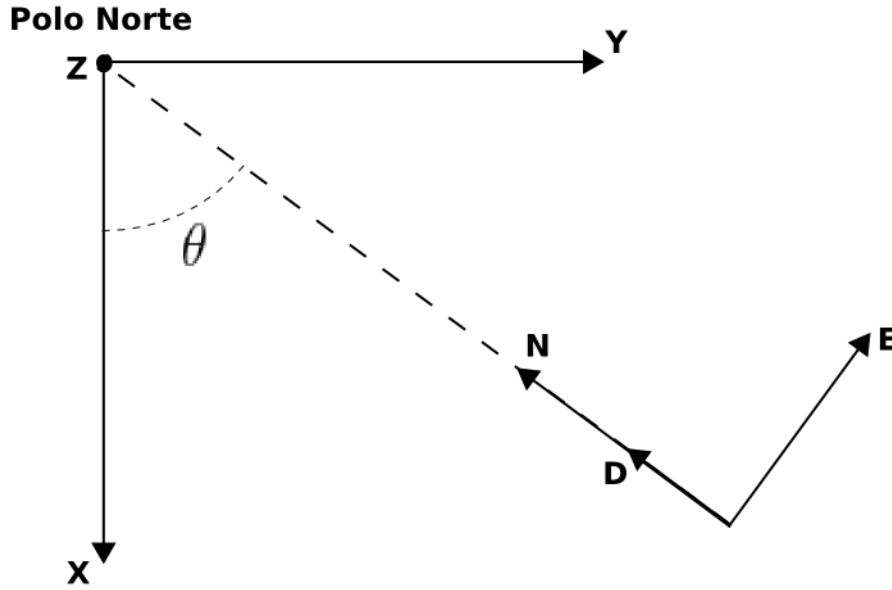


Figura 2.32: Sistemas ECEF y NED vistos desde el polo norte.

Por ello, la primera matriz de rotación será la presentada en la Ecuación 2.13, que se presenta aquí de nuevo:

$$\mathbf{R}_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Una vez lograda la coincidencia de los ejes  $Y$  y  $E$ , dejamos esos ejes quietos y le toca el turno a los demás. Ahora, miraremos a la Figura 2.31 lateralmente, de modo que el eje  $Y$  *entre* en el plano del papel y se aleje de usted. Este punto de vista nos proporciona la Figura 2.33.

De la figura Figura 2.33 se puede deducir que para que el eje  $X$  coincida con el  $N$ , y el  $Z$  coincida con el  $D$ , es necesario hacer una rotación alrededor del eje  $Y$ , es decir, hay que aplicar una matriz de rotación  $R_2$ .

El valor del ángulo se deduce girando en sentido antihorario un ángulo de  $90 + \beta$  (donde evidentemente  $\beta$  es la latitud del punto de observación). Como el sentido de giro es al revés del dictado por el eje  $Y$  (positivo es giro horario en este esquema), entonces el ángulo será en realidad  $-90 - \beta$ , por lo que la matriz de rotación correspondiente será la de la Ecuación 2.12, que se repite a continuación:

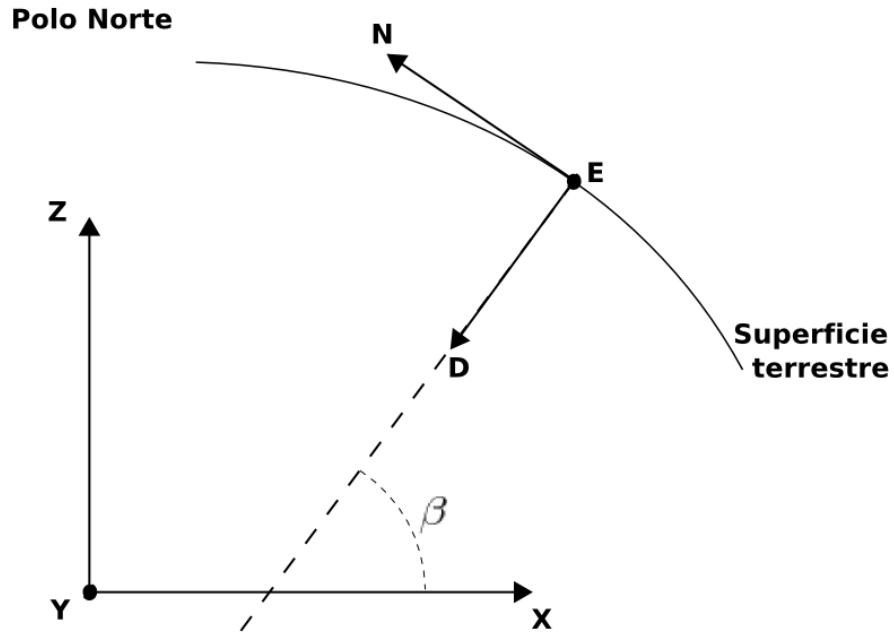


Figura 2.33: Sistemas ECEF y NED vistos lateralmente.

$$\mathbf{R}_2((-90-\beta)) = \begin{pmatrix} \cos(-90-\beta) & 0 & -\sin(-90-\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(-90-\beta) & 0 & \cos(-90-\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\beta & 0 & \cos\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos\beta & 0 & -\sin\beta \end{pmatrix}$$

Note que se han aplicado las identidades trigonométricas adecuadas a ángulos negativos y suma de 90 grados.

Como ya se han logrado alinear todos los ejes, entonces la conversión completa del sistema ECEF al sistema NED para el vector de línea de visión  $\vec{P}$  es la indicada en la Ecuación 2.28

$$\vec{P}_{[NED]} = \mathbf{R}_2(-90-\beta)\mathbf{R}_3(\theta)\vec{P}_{[ECEF]} \quad (2.28)$$

### NED a NEU

Una vez que se tiene el vector  $\vec{P}$  en el sistema NED del punto de observación, la conversión del sistema NED al sistema NEU (North-East-Up) se logra aplicando la matriz de reflexión correspondiente al eje  $D$ . Al ser este eje el que determina la tercera componente, la matriz de reflexión adecuada será la  $S_3$ . Entonces:

$$\vec{P}_{[NEU]} = \mathbf{S}_3 \mathbf{R}_2(-90 - \beta) \mathbf{R}_3(\theta) \vec{P}_{[ECEF]}$$

Y la Ecuación 2.29 presenta la expresión completa.

$$\vec{P}_{[NEU]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \beta & 0 & \cos \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \beta & 0 & -\sin \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{P}_{[ECEF]} \quad (2.29)$$

### NEU a azimut/elevación

El último paso consiste en usar nuestro vector  $\vec{P}$ , ahora en coordenadas NEU, para obtener la elevación y el azimut. Para ello, la Figura 2.34 será muy útil.

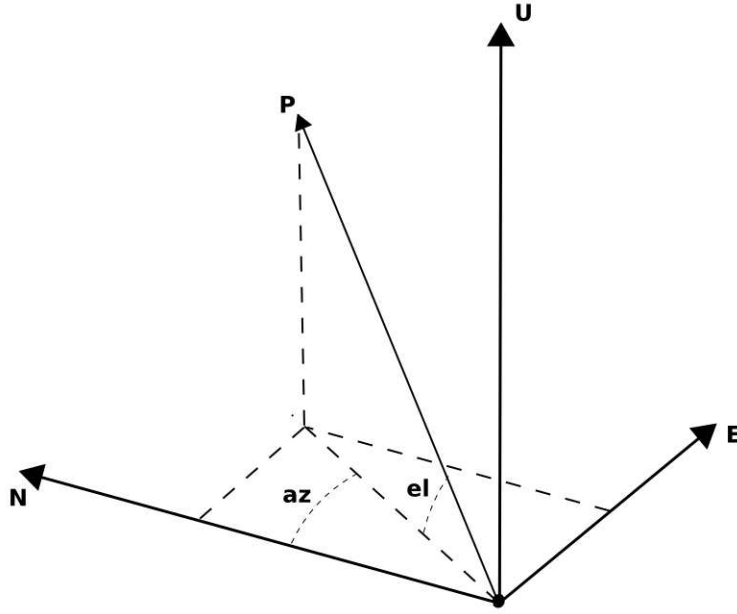


Figura 2.34: Elevación y azimut en el sistema NEU.

Mirando la Figura 2.34 es fácil deducir que:

$$P_U = \sin(elev) \cdot |\vec{P}| \quad (2.30)$$

$$P_N = \cos(azi) \cdot \left( \sqrt{P_N^2 + P_E^2} \right) \quad (2.31)$$

$$P_N = \cos(azi) \cdot (\cos(elev) \cdot |\vec{P}|) \quad (2.32)$$

De las Ecuaciones 2.30 y 2.31 (ó 2.30 y 2.32) es fácil determinar tanto el azimut como la elevación.

De esta manera encontramos las conversiones buscadas.

### 2.5.5. Distancia al horizonte

Para muchas aplicaciones, y en particular en telecomunicaciones, la distancia de un observador a la línea del horizonte es de gran importancia. En este sentido, es necesario aclarar que hay varios tipos de horizontes:

- *Horizonte astronómico*: es el definido por el plano paralelo a la superficie terrestre en la posición del observador.
- *Horizonte verdadero*: debido a la altura del observador con respecto a la superficie y a la curvatura de la Tierra, el horizonte visible es más lejano que el horizonte astronómico. Este es el horizonte más lejano al que puede alcanzar la vista.
- *Horizonte visible*: es el horizonte que resta cuando se tienen en cuenta los obstáculos alrededor del observador.

La Figura 2.35 muestra las diferencias entre estos diferentes horizontes.

Cuando la altura del observador  $h$  viene dada en metros, y  $h$  es mucho menor que el radio  $R$  de la Tierra, una expresión aproximada para la distancia en línea recta a la línea del horizonte es:

$$d = \sqrt{13h} \quad (2.33)$$

Donde  $d$  está en kilómetros. Si  $h$  es comparable con  $R$ , la expresión más exacta es ([Sque, S., 2006]):

$$d = \sqrt{2Rh + h^2} \quad (2.34)$$

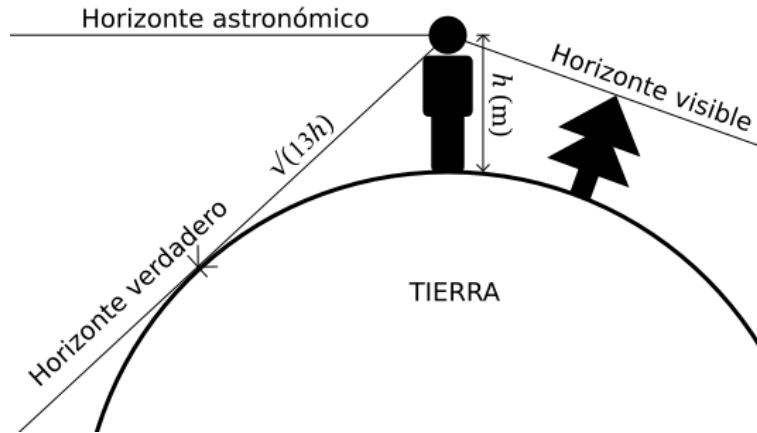


Figura 2.35: Los diferentes tipos de horizontes. (Adaptado de Wikipedia)

Donde deben utilizarse las mismas unidades para todas las magnitudes.

Las ecuaciones anteriores proporcionan la distancia en línea recta. Para obtener la distancia a lo largo del arco terrestre se usa la fórmula:

$$s = R \arccos \left( \frac{R}{R+h} \right) \quad (2.35)$$

Las dos últimas ecuaciones son válidas incluso para satélites con órbitas a grandes alturas.

### 2.5.6. Sistema de coordenadas eclíptico

El sistema de coordenadas eclíptico es aquel cuyo plano fundamental (el plano que divide a la esfera celeste en dos hemisferios iguales) es la eclíptica. A su vez, la eclíptica es la proyección del plano orbital de la Tierra en la esfera celeste<sup>28</sup>.

Como muestra la figura 2.36, este sistema define la *latitud eclíptica* ( $\beta$ ) y la *longitud eclíptica* ( $\lambda$ ). También se puede apreciar que el ecuador celeste y la eclíptica están separados por el ángulo  $\varepsilon$ , llamado *oblicuidad de la eclíptica*. El valor de  $\varepsilon$  varía con el tiempo, si bien su valor actual es de  $23^\circ 27'$ .

<sup>28</sup>Equivalente a la ruta aparente que sigue el Sol entre las estrellas a lo largo del año

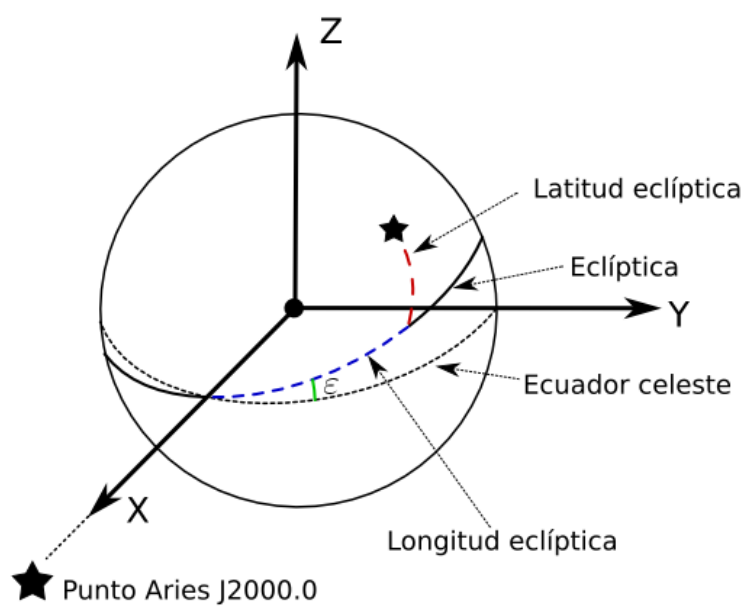


Figura 2.36: Sistema eclíptico

# Distancias entre puntos sobre la Tierra

---

Para calcular la distancia entre puntos sobre la superficie terrestre es necesario tener en cuenta que ésta *no es plana*, lo que implica que existirán ligeras (o grandes) distorsiones si se realiza esta operación sobre un mapa (dependiendo del tipo de este último).

Adicionalmente, el hecho de que la Tierra sea un geoide introduce variaciones adicionales, que deberán (o no) tenerse en cuenta dependiendo de la precisión con que se desee realizar la medición. A los fines de una primera aproximación, asumiremos que la Tierra es esférica.

En el Sistema Internacional la unidad preferida para hacer mediciones de distancia sobre la superficie terrestre es el kilómetro. Si tomamos como radio medio de la Tierra el valor de  $(a+b)/2 = 6367,445$  km (ver 2.3.1), tenemos que el perímetro medio del planeta son 40007,8 km.

Por otro lado, una unidad que todavía se utiliza mucho en navegación aérea y marítima es la *Milla Náutica* (Nautical Mile (NM)). Una milla náutica equivale a 1,852 km.

Este valor tan curioso tiene una explicación sencilla: Si tomamos el perímetro medio y lo dividimos entre el número de minutos de arco de una circunferencia, el resultado es:  $40007,8 \text{ km} / (360 \times 60 \text{ minutos de arco}) = 1,8522 \text{ km/minuto de arco}$ ; por lo tanto, una milla náutica corresponde a un minuto de arco sobre la superficie terrestre (a lo largo de un círculo máximo).

La unidad de velocidad asociada a la milla náutica es el *Nudo* (Knot (kt)), que significa *una milla náutica por hora*<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Fíjese que es un gran error decir “nudos por hora” para referirse a una velocidad.

### 3.1. Relación entre el ecuador y los paralelos

Asumiendo que la Tierra es una esfera (con radio medio  $R = 6367,445$  km), es fácil determinar la relación que existe entre el radio en el ecuador y el radio de cualquier otro paralelo. Para ello, examine la figura 3.1:

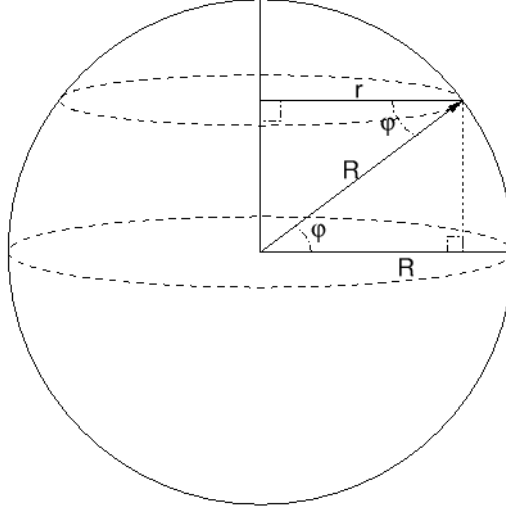


Figura 3.1: Relación entre el ecuador y los paralelos

Es fácil ver que el radio en el ecuador  $R$  está relacionado con el radio en el paralelo  $r$  por medio del coseno de la latitud:

$$\cos \varphi = \frac{r}{R} \rightarrow$$

$$r = R \cos \varphi \quad (3.1)$$

Por otro lado, supongamos primero que tenemos dos puntos que se encuentran sobre el ecuador con una diferencia de longitud  $\beta$  entre ambos. Dichos puntos están separados por la distancia del arco  $D$ , como muestra la figura 3.2.

Si además tenemos otro par de puntos separados la misma longitud pero sobre otro paralelo, la distancia sobre el arco que los une será  $d$  y la relación entre ambas distancias viene dada por:

$$D = \beta R$$



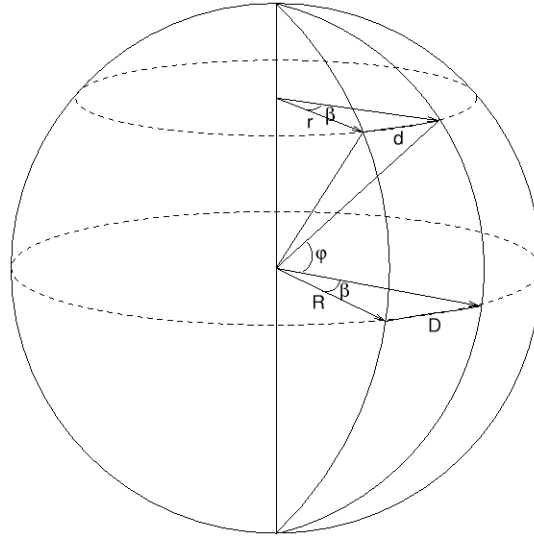


Figura 3.2: Diferencia de longitud sobre un paralelo

$$\begin{aligned}
 d &= \beta r \\
 \frac{d}{D} &= \frac{\beta r}{\beta R} \rightarrow \frac{d}{D} = \frac{r}{R} \rightarrow \frac{d}{D} = \cos \varphi \rightarrow \\
 d &= D \cos \varphi
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

No olvide que las expresiones del tipo  $D = \beta R$  son válidas sólo si el ángulo  $\beta$  viene dado en radianes.

### 3.2. Cambiando de coordenadas

Para algunos casos es útil cambiar del sistema usual de coordenadas Latitud-Longitud a un sistema de coordenadas rectangulares. Una manera de hacer esto es fijar el origen del sistema en el centro de la Tierra, con el *eje x* pasando por la intersección del ecuador con el meridiano de Greenwich (Latitud  $0^\circ$ , Longitud  $0^\circ$ ), y el *eje z* alineado con el eje de rotación, como muestra la figura 3.3.

Adoptando este sistema de referencia, lo más fácil de convertir es la *componente z* del punto  $P$ , pues está relacionada solamente con el seno de la latitud. Por otra parte, el coseno de la latitud define un vector  $R'$  que utilizamos a su vez para hallar las *componentes x, y*:

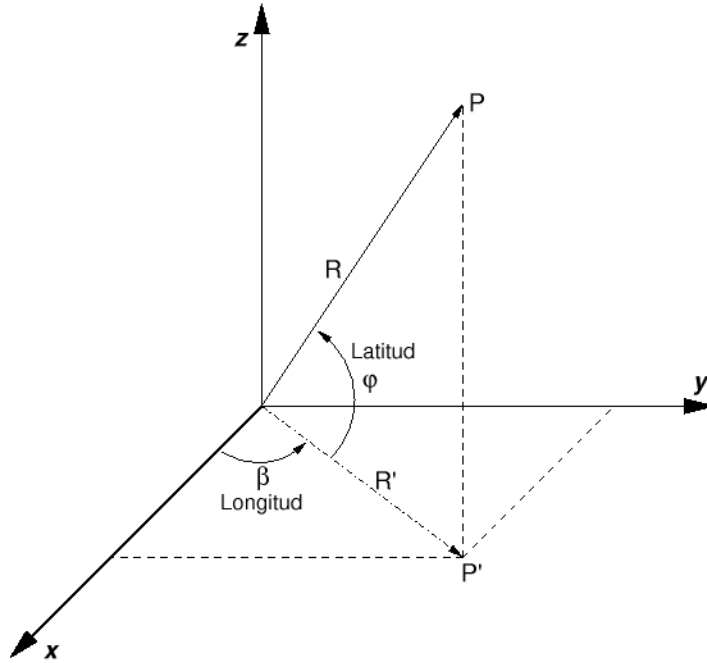


Figura 3.3: Cambiando a coordenadas rectangulares

$$\begin{aligned}
 z &= R \sin \varphi \\
 R' &= R \cos \varphi \\
 x &= R' \cos \beta \rightarrow x = R \cos \varphi \cos \beta \\
 y &= R' \sin \beta \rightarrow y = R \cos \varphi \sin \beta
 \end{aligned}$$

Lo anterior lo podemos expresar de manera más compacta en forma de vectores, donde  $r$  es el *vector de posición* desde el centro de la Tierra al punto en estudio:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \cos \beta \\ R \cos \varphi \sin \beta \\ R \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Una vez halladas las coordenadas de un par de puntos en un sistema rectangular, la *distancia directa*  $d'$  entre ellos (es decir, la distancia si pudiéramos viajar atravesando el planeta) viene dada por la expresión 3.4.

$$d'^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \rightarrow$$

$$d' = R\sqrt{(\cos \varphi_2 \cos \beta_2 - \cos \varphi_1 \cos \beta_1)^2 + (\cos \varphi_2 \sin \beta_2 - \cos \varphi_1 \sin \beta_1)^2 + (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)^2} \quad (3.4)$$

Donde las coordenadas  $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $(x_2, y_2, z_2)$  han sido sustituidas por sus expresiones correspondientes en 3.3.

Note que, en notación vectorial,  $d'$  es el módulo de la diferencia de los vectores de posición  $r_1$  y  $r_2$ :

$$d' = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| \quad (3.5)$$

### 3.3. Distancia a lo largo de un círculo máximo

#### 3.3.1. Método aproximado N°1

Basándonos en los resultados de las secciones anteriores, es posible entonces determinar la distancia más corta entre dos puntos cualquiera sobre la superficie terrestre; es decir, la distancia a lo largo del *círculo máximo* que los une.

La figura 3.4 muestra un círculo máximo que contiene dos puntos de interés:

Tenga muy en cuenta que el plano que contiene al círculo máximo no necesariamente coincide con el ecuador o los meridianos, por lo que el ángulo  $\alpha$  en general *no* coincide con latitudes o longitudes.

La distancia que nos interesa hallar es la correspondiente al arco  $m$ , y por esto la clave está en calcular el ángulo  $\alpha$ .

Para ello, note que la distancia directa  $d'$  define, en conjunto con el centro de la Tierra (condición necesaria para todo círculo mayor), un triángulo isósceles cuyos lados iguales tienen tamaño  $R$  y su lado desigual es  $d'$ .

Con estas observaciones, y los resultados de las secciones precedentes, podemos entonces hallar la expresión para  $m$ :

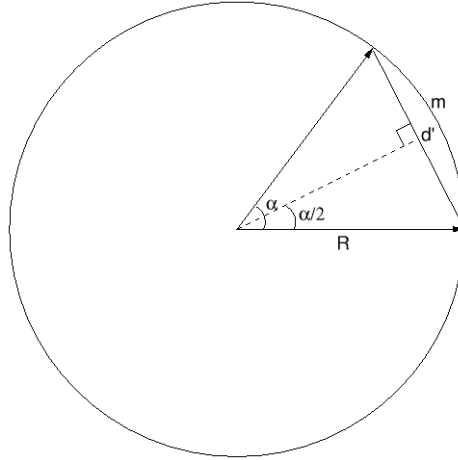


Figura 3.4: Distancia a lo largo de un círculo máximo

$$\begin{aligned}\frac{d'}{2} &= R \sin \frac{\alpha}{2} \rightarrow \\ \sin \frac{\alpha}{2} &= \frac{d'}{2R} \rightarrow \\ \alpha &= 2 \arcsin\left(\frac{d'}{2R}\right)\end{aligned}$$

$$m = \alpha R \rightarrow m = 2R \arcsin\left(\frac{d'}{2R}\right) \rightarrow$$

$$m = 2R \arcsin\left(\frac{\sqrt{(\cos \varphi_2 \cos \beta_2 - \cos \varphi_1 \cos \beta_1)^2 + (\cos \varphi_2 \sin \beta_2 - \cos \varphi_1 \sin \beta_1)^2 + (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)^2}}{2}\right) \quad (3.6)$$

### Ejemplo: Distancia entre Barcelona y Nueva York

En este ejemplo calcularemos la distancia mínima entre Barcelona (España) y Nueva York (EEUU). Adicionalmente, compararemos dicha distancia con la que se recorrería si se siguiera un paralelo.

Consultando la tabla 2.5 obtenemos que las coordenadas correspondientes son:

- (1) *Barcelona*: 41,30° N / 2,09° E.

- (2) *Nueva York*: 40,75° N / 73,99° W (-73,99°).

Con estos datos, y tomando un radio medio de la Tierra de 6367,44 km, podemos empezar a realizar los cálculos preliminares:

$$\sin\varphi_1 = \sin(41,30^\circ) = 0,660$$

$$\cos\varphi_1 = \cos(41,30^\circ) = 0,751$$

$$\sin\beta_1 = \sin(2,09^\circ) = 0,036$$

$$\cos\beta_1 = \cos(2,09^\circ) = 0,999$$

$$\sin\varphi_2 = \sin(40,75^\circ) = 0,653$$

$$\cos\varphi_2 = \cos(40,75^\circ) = 0,758$$

$$\sin\beta_2 = \sin(-73,99^\circ) = -0,961$$

$$\cos\beta_2 = \cos(-73,99^\circ) = 0,276$$

Ahora introducimos estas cifras en la expresión 3.6 y obtenemos la distancia  $m$  recorrida siguiendo el círculo máximo:

$$(\cos\varphi_2 \cos\beta_2 - \cos\varphi_1 \cos\beta_1)^2 = (-0,541)^2 = 0,293$$

$$(\cos\varphi_2 \sin\beta_2 - \cos\varphi_1 \sin\beta_1)^2 = (-0,755)^2 = 0,570$$

$$(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)^2 = (-0,007)^2 = 0,0$$

$$m = 2R \arcsin\left(\frac{\sqrt{0,293 + 0,570 + 0,0}}{2}\right) \rightarrow$$

$$m = 2(6367,44 \text{ km}) \arcsin(0,465) \rightarrow$$

$$m = 2(6367,44 \text{ km})(0,484 \text{ rad}) \rightarrow$$

$$m = 6163,68 \text{ km}$$

Seguidamente, comparemos con la distancia  $d$  recorrida si se hubiera seguido un paralelo y no el círculo máximo. Ambas ciudades tienen una latitud muy

parecida, y el paralelo medio entre Barcelona y Nueva York es, aproximadamente, el  $41^\circ$ .

Entonces, lo que hay que hacer es hallar la diferencia en las longitudes, e introducir este valor en la expresión 3.2, de esta manera:

$$\Delta Longitud = 2,09^\circ - (-73,99^\circ) = 76,08^\circ$$

$$r = R \cos \varphi = (6367,44 \text{ km}) \cos(41^\circ) \rightarrow$$

$$r = 4805,57 \text{ km}$$

$$d = \beta r = \frac{\pi 76,08^\circ}{180^\circ} 4805,57 \text{ km} \rightarrow$$

$$d = 6381,80 \text{ km}$$

Como era de esperarse, las distancias *no* son iguales: Cuando se recorre el círculo máximo la distancia es menor.

$$m - d = 218,12 \text{ km} = 117,78 \text{ NM} = 1^\circ 57,78'$$

La diferencia son 218,12 km, equivalentes a 117,78 millas náuticas (*¡casi dos grados de arco medidos sobre el ecuador!*).

En la figura 3.5 puede ver una representación de la trayectoria a lo largo del círculo máximo entre estas dos ciudades (generada gracias a la utilidad *Great Circle Mapper* de Karl Swartz [Swartz, 2006]).

### 3.3.2. Método aproximado N°2

Existe un segundo método para determinar la distancia entre dos puntos a lo largo de un círculo máximo, y que se vale de la relación del producto escalar. Sean dos vectores de posición  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$ :



Figura 3.5: Círculo máximo Barcelona - Nueva York

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} R \cos \varphi_1 \cos \beta_1 \\ R \cos \varphi_1 \sin \beta_1 \\ R \sin \varphi_1 \end{pmatrix} \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} R \cos \varphi_2 \cos \beta_2 \\ R \cos \varphi_2 \sin \beta_2 \\ R \sin \varphi_2 \end{pmatrix}$$

Entonces, el producto escalar de dichos vectores puede escribirse así:

$$\begin{aligned} r_1 \cdot r_2 &= (R \cos \varphi_1 \cos \beta_1)(R \cos \varphi_2 \cos \beta_2) \\ &+ (R \cos \varphi_1 \sin \beta_1)(R \cos \varphi_2 \sin \beta_2) \\ &+ (R \sin \varphi_1)(R \sin \varphi_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_1 \cdot r_2 &= R^2[(\cos \varphi_1 \cos \beta_1)(\cos \varphi_2 \cos \beta_2) \\ &+ (\cos \varphi_1 \sin \beta_1)(\cos \varphi_2 \sin \beta_2) \\ &+ (\sin \varphi_1)(\sin \varphi_2)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_1 \cdot r_2 &= R^2[(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2)(\cos \beta_1 \cos \beta_2 + \sin \beta_1 \sin \beta_2) \\ &+ (\sin \varphi_1)(\sin \varphi_2)] \end{aligned}$$

$$r_1 \cdot r_2 = R^2[(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2)(\cos(\beta_1 - \beta_2)) + (\sin \varphi_1)(\sin \varphi_2)]$$

Adicionalmente, otra expresión para el producto escalar es la siguiente, que incluye al ángulo  $\alpha$  entre los dos vectores  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$ :

$$r_1 \cdot r_2 = |r_1| |r_2| \cos \alpha \rightarrow$$

$$r_1 \cdot r_2 = R^2 \cos \alpha$$

Note que como estamos simplificando suponiendo que la Tierra es esférica, entonces  $|\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| = R$ .

Combinando las expresiones anteriores, tendremos finalmente que:

$$R^2 \cos \alpha = R^2 [\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\beta_1 - \beta_2) + (\sin \varphi_1)(\sin \varphi_2)] \rightarrow$$

$$\alpha = \arccos[\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\beta_1 - \beta_2) + (\sin \varphi_1)(\sin \varphi_2)] \rightarrow$$

$$m = R \arccos[\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\beta_1 - \beta_2) + (\sin \varphi_1)(\sin \varphi_2)] \quad (3.7)$$

### Ejemplo: Distancia entre Barcelona y Nueva York (Método N° 2)

En este ejemplo calcularemos la distancia mínima entre Barcelona (España) y Nueva York (EEUU) utilizando el método del producto escalar.

Recordamos que las coordenadas correspondientes son:

- (1) *Barcelona*: 41,30° N / 2,09° E.
- (2) *Nueva York*: 40,75° N / 73,99° W (-73,99°).

Con estos datos, y tomando un radio medio de la Tierra de 6367,44 km, podemos realizar los cálculos:

$$m = R \arccos[\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\beta_1 - \beta_2) + (\sin \varphi_1)(\sin \varphi_2)] \rightarrow$$

$$m = 6367,44 \text{ km} \arccos[\cos(41,30) \cos(40,75) \cos(2,09 - (-73,99)) + \sin(41,30) \sin(40,75)] \rightarrow$$



$$m = 6367,44 \text{ km} \arccos[0,137 + 0,431] \rightarrow$$

$$m = 6157,585 \text{ km}$$

En este caso hay una ligera diferencia con respecto al método 1, atribuible a que en el primer método se cometen más errores de redondeo debido a la mayor cantidad de operaciones realizadas.

### 3.3.3. Método Andoyer

Es posible obtener una mejor estimación de la distancia en la superficie del elipsoide (en vez de asumir que la Tierra es una esfera) usando el método de Andoyer ([Andoyer, 1950]). Para ello, primero se calculan unas cantidades auxiliares utilizando el valor de las latitudes y longitudes proporcionadas (ATENCIÓN: Todos los valores angulares deben proporcionarse en radianes):

$$F = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$$

$$G = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$$

$$\lambda = \frac{\beta_2 - \beta_1}{2}$$

$$S = (\sin G)^2 (\cos \lambda)^2 + (\cos F)^2 (\sin \lambda)^2$$

$$C = (\cos G)^2 (\cos \lambda)^2 + (\sin F)^2 (\sin \lambda)^2$$

$$\omega = \arctan \left( \sqrt{\frac{S}{C}} \right)$$

Donde  $\omega$  debe expresarse en radianes. Seguidamente:

$$r = \frac{\sqrt{SC}}{\omega}$$

$$D = 2\omega a$$

El valor  $a$  es el semieje mayor o ecuatorial del elipsoide en *kilómetros*. Las últimas expresiones auxiliares son:

$$H_1 = \frac{3r - 1}{2C}$$

$$H_2 = \frac{3r + 1}{2S}$$

Y finalmente la distancia  $m$  en kilómetros será:

$$m = D(1 + fH_1(\sin F)^2(\cos G)^2 - fH_2(\cos F)^2(\sin G)^2) \quad (3.8)$$

Donde  $f$  es el factor de achatamiento. Usando este procedimiento el error será del orden del producto del cuadrado de  $f$  por la distancia encontrada  $m$  ([Meeus, 1991]):

$$\varepsilon \simeq m \cdot f^2 \quad (3.9)$$

### Ejemplo: Distancia entre Barcelona y Nueva York (Método Andoyer)

Ahora calcularemos nuevamente la distancia entre Barcelona y Nueva York utilizando el método Andoyer.

Utilizando las mismas coordenadas de los ejemplos anteriores y los valores para el elipsoide WGS-84 obtendremos:

- (1) *Barcelona*:  $41,30^\circ$  N ( $0.72082$  rad) /  $2,09^\circ$  ( $0.036477$  rad) E.
- (2) *Nueva York*:  $40,75^\circ$  N ( $0.71122$  rad) /  $73,99^\circ$  W ( $-73,99^\circ = -1.2914$  rad).

$$F = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = 0,71602$$

$$G = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = 0,0047997$$

$$\lambda = \frac{\beta_2 - \beta_1}{2} = -0,66392$$

$$S = (\sin G)^2 (\cos \lambda)^2 + (\cos F)^2 (\sin \lambda)^2 = 0,21613$$

$$C = (\cos G)^2 (\cos \lambda)^2 + (\sin F)^2 (\sin \lambda)^2 = 0,78387$$

$$\omega = \arctan \left( \sqrt{\frac{S}{C}} \right) = 0,48352$$

$$r = \frac{\sqrt{SC}}{\omega} = 0,85127$$

$$D = 2\omega a = 6167,9$$

$$H_1 = \frac{3r - 1}{2C} = 0,99111$$

$$H_2 = \frac{3r + 1}{2S} = 8,2214$$

$$m = D(1 + fH_1(\sin F)^2(\cos G)^2 - fH_2(\cos F)^2(\sin G)^2) \rightarrow$$

$$m = 6176,8 \text{ km}$$

Y el error cometido será aproximadamente:

$$\varepsilon \simeq m \cdot f^2 = 6176,8\text{km} \cdot f^2 \simeq 70 \text{ metros}$$

Como se puede apreciar, al tomar en cuenta la forma elipsoidal de la Tierra la distancia resultante es un poco mayor que en los casos anteriores.

# Los movimientos de la Tierra

---

## 4.1. Rotación

Hoy en día es de todos sabido que la Tierra cada día gira alrededor de un eje que pasa por su centro, que es lo que proporciona la alternancia entre día y noche.

Dicho eje de rotación corta a la superficie del planeta en dos puntos, denominados polo norte y polo sur *verdaderos* o *geográficos*. Actualmente, dicho eje apunta, por el norte, aproximadamente hacia una brillante estrella llamada *Polaris* (la Estrella Polar).

Una rotación completa de la Tierra, medida con respecto al Sol, dura por término medio 24 horas SI<sup>1</sup>, y es llamada *día solar*. En cambio, si la rotación se mide tomando como referencia las estrellas *fijas*<sup>2</sup>, la rotación se realiza en 23,9345 horas (23 h 56' 4,0905") y es llamada *día sideral* o *día sidéreo*. La diferencia entre ambos valores se debe al movimiento de traslación, como se indica en la figura 4.1.

La figura 4.1 representa dos días consecutivos. En el primero, a mediodía el Sol está alineado con una estrella fija que se tomó como referencia, y el meridiano del observador *m*, el Sol y dicha estrella están en la misma línea.

---

<sup>1</sup>SI significa "Sistema Internacional de Unidades". El tiempo SI es un tiempo de naturaleza atómica y se basa en el segundo. Una hora SI son 3600 segundos SI, y un día SI es, por tanto, 86400 segundos SI. Se definió de manera tal que correspondiera aproximadamente a una rotación de la Tierra, aunque debe tenerse en cuenta que ésta no tiene una velocidad de rotación constante).

<sup>2</sup>En realidad las estrellas no están fijas en el cielo, sino más bien cada una tiene su velocidad particular. No obstante, quedan tan lejanas que sus movimientos aparentes son minúsculos, y por ello se pueden tomar como referencia.

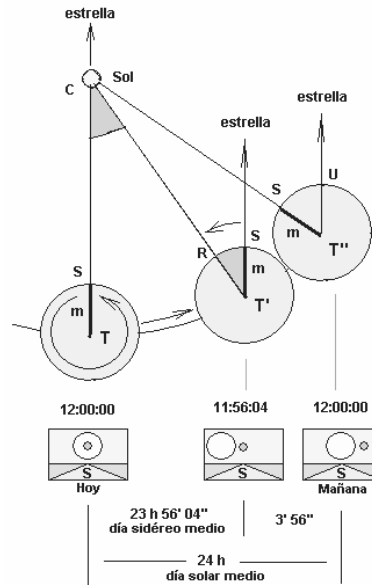


Figura 4.1: El día sideral. Fuente: Francisco J. Blanco G. (Wikipedia)

Al día siguiente, la Tierra ha rotado y se ha trasladado. Debido a este último movimiento, a mediodía *sideral* del segundo día la estrella fija se encuentra de nuevo alineada con el meridiano del observador  $m$ , pero debido a la traslación, el Sol está “retrasado”. La diferencia es de aproximadamente un (1) grado, que corresponde a 3' 55,9" horarios.

Posteriormente (3 minutos y 55,9 segundos después, para ser exactos) el meridiano  $m$  se alineará con el Sol (porque la Tierra sigue rotando) y tendremos un mediodía *solar*. La estrella de referencia, no obstante, está adelantada.

Por tanto, si se hubiera medido la rotación de la Tierra tomando como referencia las estrellas fijas (día sideral o día sidéreo), el *día* así definido hubiera sido casi 4 minutos más corto. Es por esta razón que no vemos las mismas estrellas en el cielo durante todo el año. Cada día las estrellas salen por el este unos 4 minutos antes.

La manera anterior de medir el tiempo se denomina *tiempo sideral*, y se toma como punto de referencia el *equinoccio vernal* o *Punto Aries*<sup>3</sup>.

Además de lo anterior, la velocidad de rotación de la Tierra no es constante, sino que tiene ligeras variaciones debidas a la presencia de la Luna, el frotamiento de las aguas de mares poco profundos, movimientos en la atmósfera, y desplazamientos

<sup>3</sup>Además, existe el *tiempo sideral aparente* o *verdadero*, cuando se toma en cuenta la nutación del punto Aries, y el *tiempo sideral medio* cuando no se toma en cuenta (ver la sección 4.3 para más información).

bruscos en el interior del planeta, entre otras causas. Esto tiene consecuencias en la medición del tiempo, y es la razón por la cual se definen diferentes tipos de *tiempos* (Universal Time 0 (UT0), Universal Time 1 (UT1), Universal Time 2 (UT2), etc).

#### 4.1.1. Día juliano

El día juliano ( $JDN$ ) es una importante manera de medir el transcurso del tiempo utilizada en astronomía. Está definido como el número entero de días que han transcurrido desde el *mediodía* (hora de Greenwich) del lunes 1ro de Enero del año 4713 antes de nuestra era, medidos según el calendario juliano<sup>4</sup> ([Wikipedia, 2006]).

Para calcular el día juliano se utiliza el siguiente algoritmo (válido para años a partir de 1583), donde los meses están numerados del 1 al 12, empezando por Enero. También, tenga en cuenta que el resultado es válido a partir del *mediodía*, porque el día juliano empieza al mediodía de Greenwich<sup>5</sup>. Adicionalmente, los símbolos  $\lfloor \rfloor$  indican que debe tomarse la parte entera del resultado entre dichos símbolos.

$$a = \left\lfloor \frac{14 - mes}{12} \right\rfloor$$

$$y = anyo + 4800 - a$$

$$m = mes + 12a - 3$$

$$JDN = dia + \left\lfloor \frac{153m + 2}{5} \right\rfloor + 365y + \left\lfloor \frac{y}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y}{400} \right\rfloor - 32045 \quad (4.1)$$

Si se desea incluir la parte fraccionaria, se puede usar esta expresión:

<sup>4</sup>El calendario juliano fue el instaurado por el emperador romano Julio César. Dado que dicho calendario se estableció en el año 4 de nuestra era, la extensión hacia el -4713 es un artificio matemático, y por ello se habla en este caso del calendario juliano “proléptico”.

<sup>5</sup>Esta convención es muy apropiada para los astrónomos, pues así todas las observaciones hechas durante la noche (según Greenwich) caen durante el mismo día juliano.

$$JD = JDN + \frac{\text{horas} - 12}{24} + \frac{\text{minutos}}{1440} + \frac{\text{segundos}}{86400} \quad (4.2)$$

Un valor de referencia importante es el 1ro de Enero del 2000 a mediodía (J2000.0), cuyo  $JDN = 2451545,0$ .

## 4.2. Traslación

Mientras la Tierra gira alrededor de sí misma, también lo hace alrededor del Sol. Este movimiento es llamado *traslación* y tiene una duración de poco más de 365 días.

El movimiento de traslación tiene una órbita elíptica, y el Sol ocupa uno de los focos de la elipse (el otro foco está vacío). La distancia media Tierra-Sol es llamada una *Unidad Astronómica* (AU), y se utiliza para indicar distancias dentro del sistema solar. Su valor es de 149 597 870 691 m (casi 150 millones de kilómetros). Cuando la Tierra se halla más cercana al Sol se habla del *Perihelio*, y cuando está más lejana, *Afelio*.<sup>6</sup>

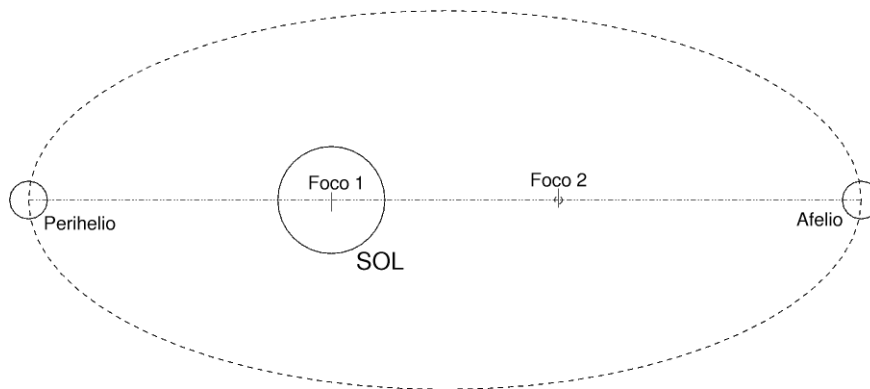


Figura 4.2: La órbita terrestre

Además debe tomarse en cuenta que de acuerdo con las leyes de Kepler, la velocidad del planeta en su órbita es mayor mientras más cerca esté del Sol (perihelio), y es menor mientras más alejado esté (afelio).

<sup>6</sup>El sufijo habitual para denotar al Sol es *helios*. El sufijo para la Tierra es *geo*, y si las órbitas toman como referencia nuestro planeta (por ejemplo, en el caso de un satélite artificial), se habla entonces de *perigeo* y *apogeo*.



Debido a este cambio en la velocidad y a otros fenómenos (precesión, atracciones gravitatorias de otros cuerpos celestes, etc.), el período exacto de una traslación terrestre varía según el punto específico de la órbita que tomemos como referencia. Por estas razones, hay diferentes definiciones para el *año*:

- *Año tropical medio*: En el año 2000 tenía una duración de 365,24218967 días Sistema Internacional (SI) y corresponde al período promedio de todos los puntos de la órbita.
- *Año vernal equinoxial*: Representa el período desde el inicio de una primavera (equinoccio vernal) hasta el inicio de la siguiente. Dura 365,2424 días SI y forma la base de la mayor parte de los calendarios solares.
- *Año sideral*: Es el tiempo que tarda la Tierra en hacer una revolución alrededor del Sol, tomando como referencia las estrellas fijas. Dura 365,256363051 días SI (dato correspondiente al año 2000).
- *Año anomalístico*: Es el tiempo que tarda la Tierra en hacer una revolución alrededor del Sol, tomando como referencia sus *ápsides* (puntos extremos de la órbita: Perihelio y afelio). En promedio dura 365,259635864 días SI (dato correspondiente al año 2000).

Por otra parte, conforme la Tierra se traslada a lo largo de su órbita, las estrellas que están en el *cénit* a medianoche van cambiando (ver figura 4.1). En consecuencia, en el lado opuesto del planeta el Sol, a mediodía, aparentará que se encuentra *pasando* frente a diferentes estrellas durante el año.

Esa *trayectoria aparente* que (visto desde la Tierra) sigue el Sol frente al fondo de estrellas fijas, se llama *eclíptica*, y define el plano orbital de la Tierra. Adicionalmente, dado que los planetas del Sistema Solar rotan en planos parecidos, éstos también aparentan seguir, aproximadamente, dicha eclíptica.

Desde tiempos inmemoriales, el hombre dividió a las estrellas que veía en grupos más o menos definidos a los que llamó *constelaciones*. Hay muchas constelaciones, pero la eclíptica "pasa" por sólo doce de ellas, llamadas las *constelaciones del zodiaco*<sup>7</sup>.

---

<sup>7</sup>El zodiaco era muy importante para los hombres primitivos, pues la constelación por donde el Sol *pasaba* indicaba qué estación era, y por tanto servía a las tribus como calendario para saber los tiempos de siembra y cosecha, el paso de los animales migratorios, la llegada de la nieve o las lluvias, etc.

En su mundo mágico-religioso el poderoso Sol, dador de toda vida, se confabulaba con las figuras que dibujaban las estrellas en el cielo para producir portentosos cambios en la Tierra. Estas historias, nacidas de la necesidad y la ignorancia, con el tiempo degeneraron en la superstición llamada "astrología", que lamentablemente persiste en nuestros días.

En este sentido es necesario agregar que debido a varias cosas, entre ellas cambios en los ejes

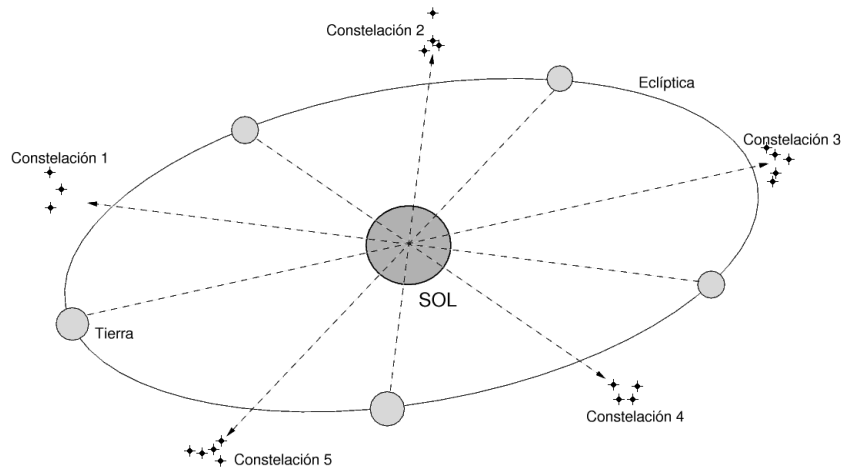


Figura 4.3: La Eclíptica

#### 4.2.1. La inclinación de la Tierra

Cuando relacionamos el movimiento de traslación de la Tierra con el de rotación, notamos que los ejes alrededor de los cuales se realizan estos movimientos *no son paralelos*. El eje de rotación de la Tierra tiene una inclinación de  $23,45^\circ$  ( $23^\circ 27'$ ) con respecto al eje traslación (ángulo de la eclíptica u oblicuidad de la eclíptica).

Esta inclinación es la responsable de que, entre otras cosas, existan las estaciones. Cuando el polo norte está inclinado hacia el Sol, recibe mayor cantidad de calor el hemisferio norte, y lo contrario cuando es el polo sur el que está mirando hacia el Sol. Este efecto viene dado principalmente por el ángulo con que los rayos solares incidan sobre la superficie terrestre. Mientras más cercano a la perpendicular esté el ángulo con que caen estos rayos, mayor energía calórica transmitida al terreno y menos la proporción que rebota al espacio.

El ángulo de incidencia de los rayos solares varía porque durante su “viaje” por la eclíptica, la altura máxima del Sol sobre el horizonte también varía. Al principio del verano, el Sol alcanza su máxima altura en el cielo (*solsticio de verano*), mientras que al principio del invierno el Sol está a la mínima altura (*solsticio de invierno*).

Es evidente que al pasar de la máxima altura a la mínima, y viceversa, ha de pasarse por un punto medio (definido como el momento en que tanto el polo

---

de rotación de la tierra (precesión), en realidad hoy en día las constelaciones del zodiaco no son doce, sino trece: Durante la primera quincena de diciembre el Sol está en la constelación de Ofiuco (*Ophiuchus*), el serpentario.

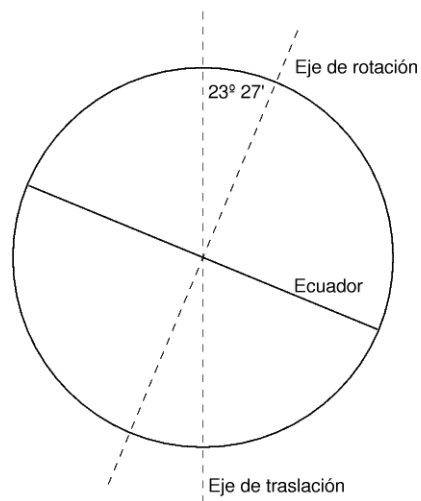


Figura 4.4: Inclinación terrestre

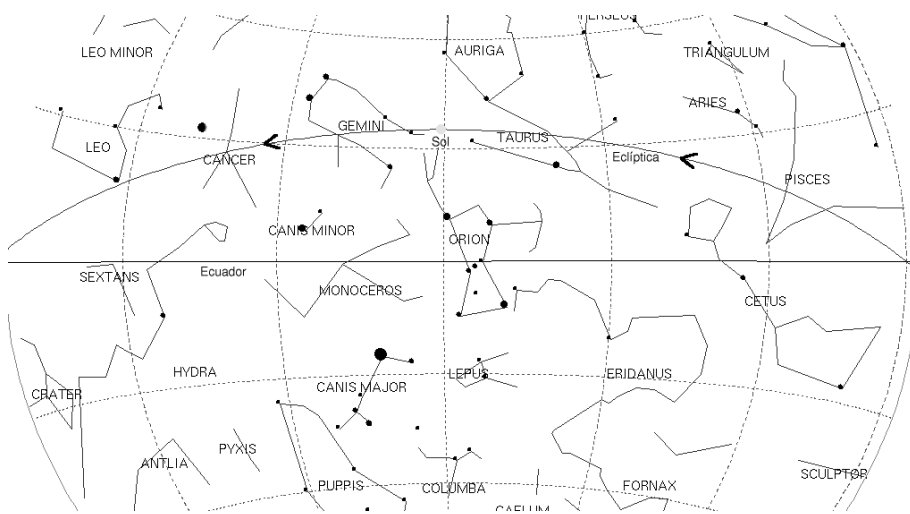
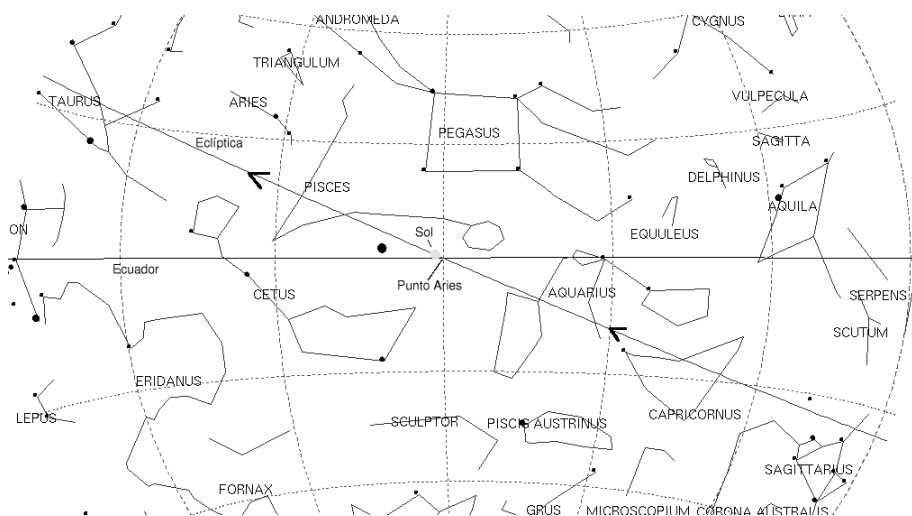
norte como el sur están igual de cerca del Sol). Dichos puntos son llamados *equinoccios*, y hay uno de primavera (cuando el Sol va “subiendo” en el cielo, llamado también *vernal*) y otro de otoño (cuando va “bajando”) y corresponden a la intersección de la eclíptica con el ecuador celeste (la proyección hacia el cielo del ecuador).

En este sentido el equinoccio de primavera (para el hemisferio norte), cuando el Sol cruza el ecuador en su viaje hacia el norte, define un punto que recibe un nombre especial: *Punto Aries*. El Punto Aries es un importante punto de referencia en el cielo que a menudo se utiliza para a partir de él definir las órbitas de los satélites artificiales y otros cuerpos celestes.

A continuación se presentan un par de imágenes indicando la posición del Sol en el cielo, a mediodía, visto desde la ciudad de Quito, Ecuador. Una corresponde al Punto Aries (equinoccio de primavera - hemisferio norte), y la otra al solsticio de verano (hemisferio norte).

Como se acaba de mencionar, en su vagar por la eclíptica el Sol alcanza los extremos norte y sur en los solsticios. Como dicho vagar se debe a la inclinación de la Tierra, entonces el valor extremo de desviación son  $23^{\circ} 27'$  hacia el norte y hacia el sur. Estos puntos determinan la banda de los trópicos: El *Trópico de Cáncer* (al norte) y el *Trópico de Capricornio* (al sur).

Note que *únicamente* dentro de la banda definida por los trópicos los rayos del Sol pueden caer perpendiculares sobre el terreno, y en los trópicos mismos, sólo lo hacen a mediodía del correspondiente solsticio.



En contraste, si a  $90^\circ$  le restamos  $23^\circ 27'$  tenemos como resultado  $66^\circ 33'$ . Este ángulo corresponde a la posición de los *Círculos Polares* tanto Ártico (norte) como Antártico (sur).

Por simple geometría es posible ver que el día del solsticio de invierno (norte) el Sol no sube más arriba del horizonte en el Círculo Polar Ártico. Más al norte de este círculo, el Sol queda siempre oculto bajo el horizonte durante varios días, alcanzándose el máximo de este fenómeno en el Polo Norte mismo, que tiene una "noche" que dura seis (6) meses. Lo mismo sucede al sur del Círculo Polar Antártico durante sus correspondientes meses de invierno.

Análogamente, lo contrario sucede en ambos polos durante sus respectivos veranos: El Sol no puede ocultarse durante varios días, y en el polo mismo el "día" dura seis (6) meses.

Es pertinente mencionar que la oblicuidad de la eclíptica varía a lo largo del tiempo con un rango que va desde los  $22,1^\circ$  hasta los  $24,5^\circ$ , y con una periodicidad de aproximadamente 41000 años (y variaciones más cortas debidas a la *nutación* ([Wikipedia, 2006b])).

La International Astronomical Union (IAU) adoptó en el año 2000 la siguiente ecuación para calcular la oblicuidad de la eclíptica, medida en segundos de arco:

$$\varepsilon = 84381,448 - 46,84024T - (5,9 \cdot 10^{-4})T^2 + (1,813 \cdot 10^{-3})T^3 \quad (4.3)$$

Donde  $T$  se mide en *siglos julianos* medidos desde la época J2000.0 (1ro de Enero del 2000, a mediodía), cuyo  $JDN = 2451545,0$ :

$$T = \frac{JD - 2451545,0}{36525}$$

#### 4.2.2. Elevación del Sol sobre el horizonte

Dado que el movimiento aparente del Sol es a lo largo de la eclíptica, es obvio que su declinación  $\delta$  (ver sección 2.5.2) no es la misma a lo largo del año. Ésta pasa de tener un valor de  $-23^\circ 27'$  en el solsticio de invierno (alrededor del 21 de diciembre para el hemisferio norte) a  $+23^\circ 27'$  durante el solsticio de verano.

Tomando en cuenta esto, se puede escribir la siguiente expresión que *aproxima* la declinación solar:

$$\delta \simeq -23,45^\circ \cdot \cos\left(\frac{360^\circ}{365}(N + 10)\right)$$

Donde  $N$  es el número de días transcurridos en el año.

Por otra parte, se puede demostrar que la elevación de un objeto lejano<sup>8</sup> en el cielo viene dada por la ecuación (asumiendo una Tierra esférica):

$$elev \simeq 90^\circ - \phi + \delta$$

De esta manera un marino no tiene que esperar a que sea de noche para buscar la estrella Polaris y estimar su latitud  $\phi$ . Basta que espere a mediodía para medir la elevación máxima del Sol, y si sabe la declinación del Sol para ese día, obtendrá su latitud. El mismo método es aplicable a otros cuerpos celestes.

### 4.3. Precesión y nutación

Debido a que la Tierra no es una esfera perfecta, la atracción gravitatoria del Sol y la Luna introducen pequeñas alteraciones en su movimiento. Este efecto cambia la orientación del eje de rotación, de una manera similar a como el eje de rotación de una peonza empieza a oscilar cuando va perdiendo energía. Adicionalmente, la inhomogeneidad en la composición de la Tierra contribuye a esto.

Este movimiento oscilatorio tiene dos componentes: La *precesión* (o componente *secular*), que tiene un período de 26000 años, y la *nutación* (componente *periódica*) con 18,6 años de período, como se muestra a continuación:

Esto tiene como curiosa consecuencia que la estrella Polaris (constelación Osa Menor) no sea siempre la referencia del Polo Norte: Hace 13000 años la estrella *polar* era Vega, en la constelación de Lira.

---

<sup>8</sup>Un objeto lejano significa en este contexto que la distancia del objeto al centro de la Tierra es mucho más grande que el radio de ésta

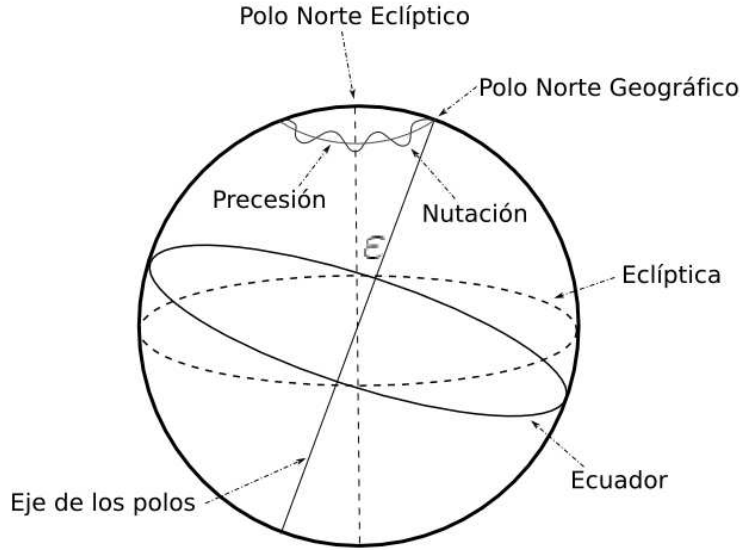


Figura 4.7: Precesión y Nutación

Cuando se toma en cuenta únicamente el efecto de la precesión sobre la posición y orientación del ecuador y el punto Aries, se habla del *ecuador medio* y el *equinoccio medio*, respectivamente ([Seeber, 1993]).

Por otro lado, cuando también se tiene en cuenta el efecto de la nutación, se habla de *ecuador verdadero* y *equinoccio verdadero*. Por esta razón, las coordenadas de un punto dado en un sistema de referencia celeste pueden ser *posiciones medias* o *posiciones verdaderas*.

Para convertir las posiciones medias dadas en la época J2000.0 a otra época  $t$ , se usa la siguiente *matriz de precesión*:

$$\mathbf{P} = \mathbf{R}_3(-z)\mathbf{R}_2(\theta)\mathbf{R}_3(\zeta) \quad (4.4)$$

Donde los ángulos de rotación vienen definidos por:

$$\zeta = 0,6406161^\circ T + 0,0000839^\circ T^2 + 0,0000050^\circ T^3$$

$$z = 0,6406161^\circ T + 0,0003041^\circ T^2 + 0,0000051^\circ T^3$$

$$\theta = 0,5567530^\circ T - 0,0001185^\circ T^2 - 0,0000116^\circ T^3$$

Donde el tiempo  $T$  viene dado en siglos julianos medidos desde la época J2000.0 (ver la sección 4.2.1).

Por otra parte, para hacer la transformación del ecuador y el equinoccio medios a los verdaderos, es necesario aplicar la *matriz de nutación*:

$$\mathbf{N} = \mathbf{R}_1(-\varepsilon - \Delta\varepsilon)\mathbf{R}_3(-\Delta\psi)\mathbf{R}_1(\varepsilon) \quad (4.5)$$

Donde los parámetros de la ecuación anterior reciben los nombres de:

- $\varepsilon$  : Oblicuidad de la eclíptica. Vea la sección 4.2.1, donde se encuentra la ecuación 4.3 que calcula esta cantidad.
- $\Delta\varepsilon$  : Nutación en oblicuidad, es decir, qué tanto ha afectado la nutación a la oblicuidad de la eclíptica.
- $\Delta\psi$  : Nutación en longitud, que significa el grado de modificación que ha ocasionado la nutación en la posición del punto Aries, medido a lo largo de la eclíptica (ver la longitud eclíptica ( $\lambda$ ) en el sistema de coordenadas eclíptico, sección 2.5.6).

Los parámetros  $\Delta\varepsilon$  y  $\Delta\psi$  requieren de largas series para su cálculo preciso. No obstante, se obtiene una buena aproximación si se utilizan sólo los coeficientes más importantes, derivándose las expresiones siguientes:

$$\Delta\varepsilon = 9,2025'' \cos \Omega + 0,5736'' \cos(2F - 2D + 2\Omega) + 0,0927'' \cos(2F - 2\Omega)$$

$$\Delta\psi = -17,1996'' \sin \Omega - 1,3187'' \sin(2F - 2D + 2\Omega) - 0,2274'' \sin(2F - 2\Omega)$$

Los valores para los coeficientes  $D$ ,  $F$  y  $\Omega$  se pueden obtener de libros de efemérides, entre otras fuentes (por ejemplo, [Meeus, 1991]).



## 4.4. Movimiento del polo

La navegación de precisión tiene que tomar en cuenta que el eje de rotación de la Tierra (es decir, el *polo instantáneo*<sup>9</sup>) tiene un movimiento propio con respecto a la corteza terrestre. Dicho movimiento es pequeño pero medible, y según el International Earth Rotation and Reference Systems Service (IERS) tiene tres componentes principales [IERS, 2001b]:

- Una *oscilación libre* denominada (*Oscilación de Chandler*) con un período aproximado de 433 días (denominado por esto *período de Chandler*). La amplitud de la oscilación es variable, promediando unos 20 metros con respecto al polo norte convencional (CIO<sup>10</sup>).

En el año 2000, el Jet Propulsion Laboratory (JPL) anunció que<sup>11</sup>:

... la principal causa de la oscilación de Chandler es la fluctuación de presión en el fondo del océano, causada por cambios en la temperatura y la salinidad, y por cambios en la circulación de los océanos debido al viento. . .

- Una *oscilación anual forzada* por el desplazamiento estacional de las masas de aire y agua.
- Una *deriva irregular* de la posición promedio del polo en la dirección 80°.

La figura 4.8 presenta el movimiento total del polo para el período comprendido desde el año 2002 al 2006 (datos proporcionados por el IERS).

Por otra parte, la figura 4.9 presenta la deriva general del polo (polo medio para cada año) para el período comprendido desde el año 1962.5 al 1997.5 (datos tomados de [IERS, 2001a]).

Este movimiento está descrito por los parámetros siguientes, denominados Earth Rotation Parameters (ERP):

- Greenwich Apparent Sidereal Time (GAST), asociado con la velocidad de rotación.

---

<sup>9</sup>La posición del polo en un instante de tiempo dado.

<sup>10</sup>El CIO se define como la orientación media del eje de rotación terrestre medida entre los años 1900 y 1905 ([Seeber, 1993]).

<sup>11</sup>Para mayor información, consulte [Jet Propulsion Laboratory, 2000]

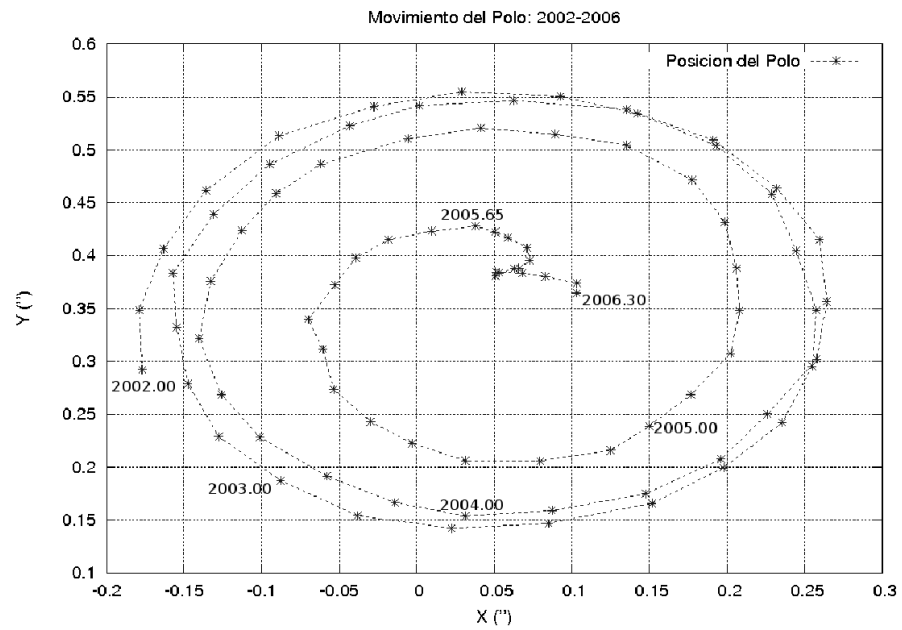


Figura 4.8: Movimiento del polo desde el año 2002 al 2006

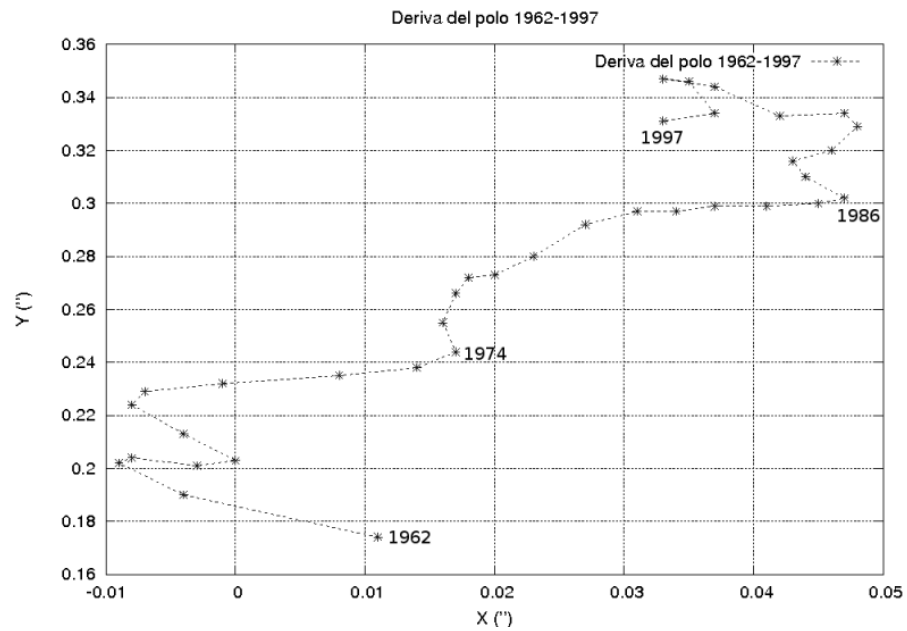


Figura 4.9: Deriva del polo desde el año 1962.5 al 1997.5

- $x_p$ , componente del movimiento del polo a lo largo del meridiano de Greenwich (en radianes), positivo hacia el ecuador.
- $y_p$ , componente del movimiento del polo perpendicular al meridiano de Greenwich (en radianes), positivo para crear un sistema a derechas.

Dada la naturaleza de este movimiento no existen teorías para predecirlo, y por ello es necesario determinar los parámetros anteriores mediante la observación. Una vez que se tienen, la matriz para aplicar la corrección por el movimiento del polo se convierte en:

$$\mathbf{S} = \mathbf{R}_2(-x_p)\mathbf{R}_1(-y_p)\mathbf{R}_3(GAST) \quad (4.6)$$

Para  $\mathbf{R}_3(GAST)$  se aplica la matriz descrita en la sección 2.4.1, mientras que para  $x_p$  y  $y_p$ , al ser ángulos muy pequeños, se usan las matrices descritas en la sección 2.4.1, quedando ([Seeber, 1993]):

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_2(-x_p)\mathbf{R}_1(-y_p) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_p \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_p & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -y_p \\ 0 & y_p & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \\ \mathbf{R}_2(-x_p)\mathbf{R}_1(-y_p) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_p \\ 0 & 1 & -y_p \\ -x_p & y_p & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalmente, luego de aplicar todas las matrices de corrección especificadas en las secciones anteriores, tenemos la expresión para convertir de un sistema CIS a un sistema CTS, tomando en cuenta los movimientos de la Tierra:

$$\vec{r}_{CTS} = \mathbf{SNP}\vec{r}_{CIS} \quad (4.7)$$



# El Campo Magnético de la Tierra

---

Es ampliamente sabido que el planeta Tierra actúa como un gran imán cuyas líneas de *campo geomagnético* surgen de un polo (el polo sur magnético) y convergen en el otro polo (polo norte magnético). El eje longitudinal de este imán tiene una desviación de aproximadamente  $11^\circ$  con respecto al eje de rotación. Por ello, los polos del campo magnético generado *no* coinciden exactamente con los polos geográficos.

Este campo geomagnético es producido por la combinación de varios campos generados por diversas fuentes, pero en un 90 % es generado por la parte exterior del núcleo de la Tierra (llamado *Campo Principal* o "Main Field").

Por otra parte, la interacción de la *ionosfera* con el viento solar y las corrientes que fluyen por la corteza terrestre componen la mayor parte del 10 % restante. Sin embargo, durante las *tormentas solares* (eventos de actividad solar exacerbada) pueden introducirse importantes variaciones en el campo magnético terrestre.

El campo geomagnético tiene 7 parámetros que lo definen, pero los más importantes desde nuestro punto de vista son la *declinación* y la *inclinación*.

La *declinación magnética* se define como el ángulo que existe entre el norte magnético y el norte verdadero (geográfico). Se denota como  $D$  y se considera positivo cuando el ángulo medido está hacia el Este del norte verdadero, y negativo en caso contrario. En términos prácticos esto significa que si la brújula marca un rumbo de  $115^\circ$ , y sabemos que la declinación magnética en ese punto es  $4^\circ$  E, el rumbo verdadero serán  $119^\circ$ .

Es una práctica común que sobre las cartas de navegación o los mapas se presenten líneas que unen puntos que tienen la misma declinación magnética. Dichas líneas son denominadas *Líneas Isógonas* o *Líneas Isogónicas*. Adicionalmente, si una línea corresponde a puntos con declinación  $0^\circ$ , se habla de *Línea Agónica*.

En la figura 5.1 se grafican los valores de declinación magnética para el año 2000.

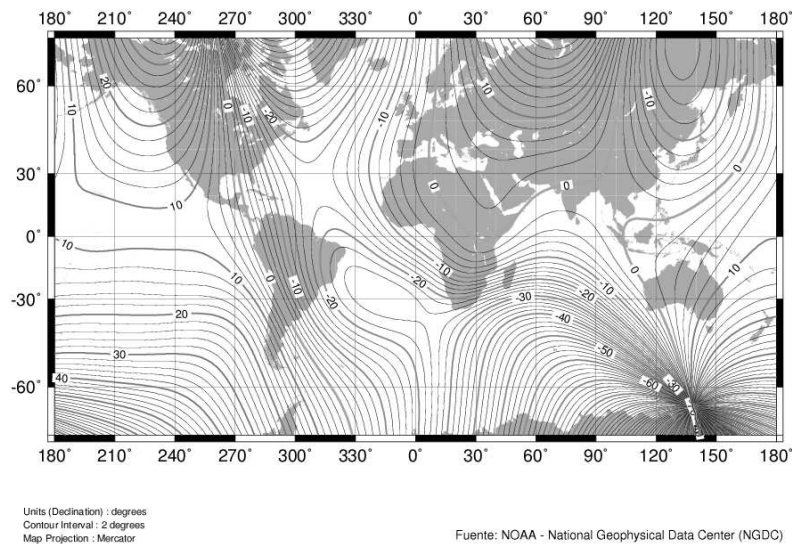


Figura 5.1: Declinación magnética - Año 2000

Se puede notar que las líneas isógonas pueden tener formas muy variadas. En particular, fíjese que al sureste de Brasil existe un mínimo local. Esta es una peculiaridad importante que recibe el nombre de *Anomalía del Atlántico Sur*.

Por otro lado, la *inclinación magnética* se define como el ángulo que existe entre el plano horizontal y el vector de campo magnético, tomando positivo cuando el vector está apuntando hacia la Tierra (hacia “abajo”). Este concepto se denota como  $I$  y significa que el vector de campo “sale” de la Tierra en el polo sur magnético, se va haciendo paralelo a la superficie terrestre cerca del ecuador, y “entra” de nuevo a la Tierra en el polo norte magnético.

Adicionalmente, es posible unir mediante una línea los puntos que poseen la misma inclinación magnética, y a tales líneas se les llama *isoclinas*. En particular, la isoclina que posee inclinación  $I = 0^\circ$  recibe el nombre de *línea aclínica* y equivale al *ecuador magnético*. La figura 5.2 indica las isoclinas para el año 2000. Como ejercicio, identifique el ecuador magnético.

Para finalizar esta sección es necesario comentar que la posición de los polos magnéticos *varía* a lo largo de los años. Por esta razón se requiere que cada cierto tiempo se revisen y modifiquen las cartas de navegación y los mapas.

En la figura 5.3 se ilustra cómo ha evolucionado la posición del polo norte magnético desde el año 2001 hasta el 2005, basándonos en datos proporcionados por [Geological Survey of Canada, 2005].

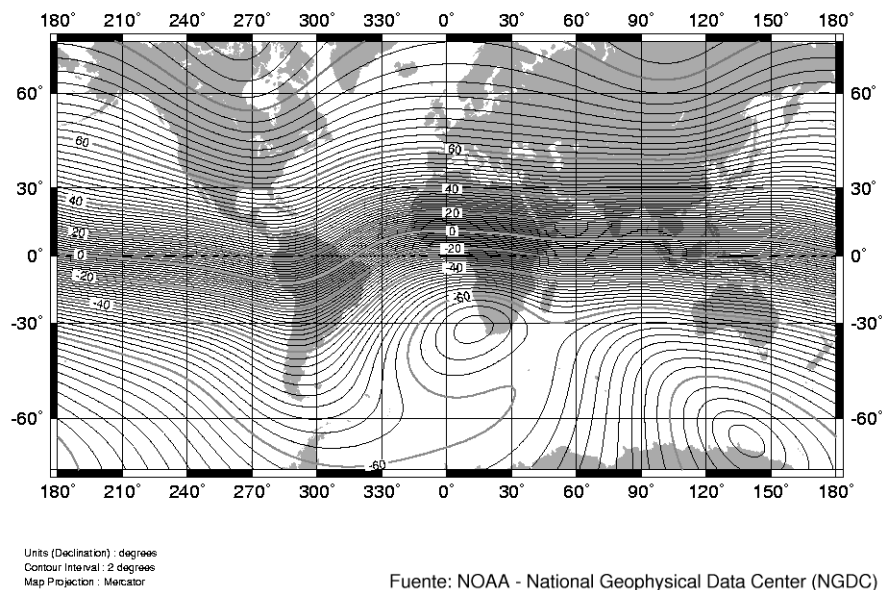


Figura 5.2: Inclinación magnética - Año 2000

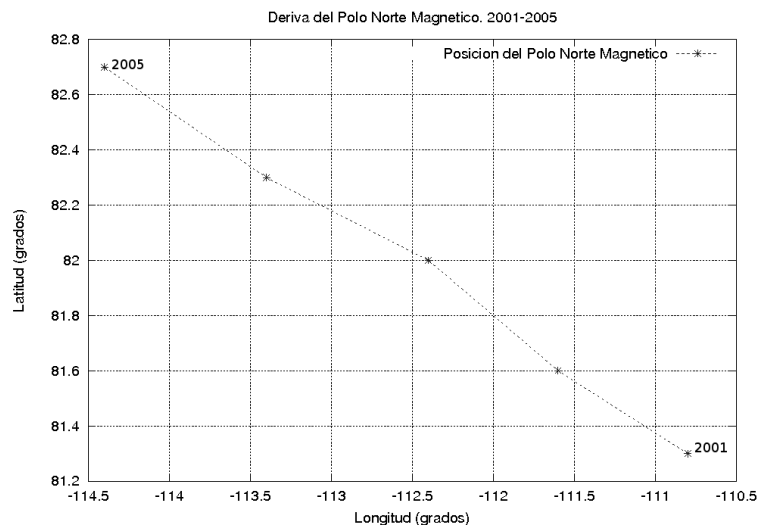


Figura 5.3: Cambio de posición del polo norte magnético: 2001-2005





---

## Capítulo 6

# El Tiempo

---

Inicialmente el arte de la navegación concernía únicamente a encontrar nuestra posición en dos dimensiones: latitud y longitud. Luego, al desarrollarse la navegación aérea se hizo necesario incorporar una tercera dimensión: la altura.

Sin embargo, la navegación es en realidad un problema de cuatro dimensiones, pues además de las mencionadas latitud, longitud y altura (o X,Y,Z del sistema ECEF), es necesario saber *en qué momento* estuvimos (o estaremos) en una posición dada.

De hecho, el estudio cuidadoso de la dimensión temporal es algo necesario para los sistemas de navegación modernos. Es más, algunos de ellos (como el o el ) están fuertemente basados en mediciones de intervalos de tiempo.

Por consiguiente, en este capítulo se presentarán los conceptos básicos asociados a la medición del tiempo.

### 6.1. Antecedentes históricos

La historia de la medición del tiempo está íntimamente ligada a la historia del calendario, entendido este último como un modo sistemático de organizar los días en semanas, meses, años y milenios.

En este sentido, una de las formas más sencillas de marcar el paso del tiempo y darle organización es mediante la referencia a las fases de la Luna. Un calendario de este tipo es llamado *lunar*, y el tiempo transcurrido entre repeticiones de una fase dada de la luna (por ejemplo, entre lunas nuevas) es llamado *mes sinódico*. Un mes sinódico dura, en promedio, 29,530589 días<sup>1</sup>. Adicionalmente, un cuarto de mes sinódico define aproximadamente una semana.

---

<sup>1</sup>Esta longitud varía, y en general tiende a alargarse.

Entre las ventajas de los calendarios lunares se encuentra el hecho de que es una referencia muy fácil de seguir. Por otra parte, tiene el inconveniente de que un mes sinódico no tiene un número entero de días. Esto se puede mitigar usando alternativamente meses de 29 y de 30 días, y ajustando la diferencia restante cada cierto tiempo. Esta es la estrategia utilizada en el calendario musulmán (que es lunar), donde cada año tiene 12 meses lunares y se intercalan 11 días extras cada 30 años para compensar la diferencia ([Australian Academy of Science, 1999]).

Por otro lado, las estaciones del año son fenómenos muy importantes para la caza, la pesca y la agricultura, pero las fases de la Luna son independientes de éstas (y se desfazan bastante cada año, como se vio anteriormente). Por esa razón, algunas culturas antiguas decidieron marcar el paso del tiempo siguiendo el movimiento aparente del Sol por el cielo, lo que marca los solsticios, equinoccios, etc. Un calendario de este tipo es llamado *solar*, y el tiempo transcurrido entre dos pasos sucesivos del Sol por el equinoccio de primavera es denominado *año vernal equinoxial*, y tiene una duración de 365,2424 días SI.

Se puede notar que la duración de un año solar tampoco tiene un número entero de días, lo que condicionó la posterior evolución de los calendarios más modernos. No obstante, se puede verificar que 19 años vernaes equinoxiales equivalen a 234,997 meses sinódicos (casi 235), lo que implica que cada 19 años las fases de la Luna (y fenómenos asociados, como los eclipses) caen casi exactamente en la misma fecha. Este ciclo no pasó desapercibido a los astrónomos de la antigüedad y es llamado *ciclo metónico*, en honor al astrónomo Metón, 5 siglos antes de nuestra era [WebExhibits, 2006b].

Es importante agregar que, dadas las ventajas y desventajas relativas de utilizar un calendario u otro, culturas como la hebrea y la china decidieron utilizar un calendario mixto, que combina las características de los dos tipos mencionados anteriormente. Se dice entonces que dichas culturas utilizan *calendarios lunisolares*.

### 6.1.1. El Calendario Romano

La evolución del calendario romano es de especial importancia para nosotros porque a partir de allí evolucionó el calendario moderno utilizado en el hemisferio occidental.

Originalmente los romanos tenían un calendario lunar, con meses cuya duración era idéntica al del ciclo lunar<sup>2</sup> ([WebExhibits, 2006a]). En esa época, un *pontifex* (pontífice o sacerdote) tenía la tarea de observar la Luna y determinar cuándo había Luna nueva (la referencia para el inicio de un nuevo mes). Cuando tal

---

<sup>2</sup>Según la leyenda, este calendario fue establecido por el mítico Rómulo unos 740 años antes de nuestra era. Más probablemente es una evolución del calendario lunar griego, que a su vez evolucionó de los Babilonios.

evento sucedía, hacía una “llamada” (*calare* en latín), y por tanto esos primeros días eran llamados *Kalendae*. De allí evolucionó la palabra “calendario”.

Al cabo de un tiempo, los romanos cambiaron a meses con días fijos, usando un año compuesto de 10 meses y 304 días (seis meses de 30 días y cuatro de 31 días). Tal parece que los restantes 61 días caían en pleno invierno, y eran ignorados (o más bien, ofrendados a los dioses de la oscuridad).

Los meses de este año primitivo empezaban con Marzo (Martius), y tenían sus nombres asignados según indica la tabla 6.1. Como podemos ver allí, algunos de los nombres modernos ya se vislumbran, aunque han perdido su sentido original.

<i>Nombre latino</i>	<i>Significado</i>
Martius	Por Marte, el dios de la guerra
Aprilis	Por la diosa Afrodita o por la palabra <i>aperire</i> (abrir)
Maius	Por la diosa Maia
Junius	Por el dios Juno
Quintilis	El quinto mes
Sextus	El sexto mes
September	El séptimo mes
October	El octavo mes
November	El noveno mes
December	El décimo mes

Tabla 6.1: Nombres de los antiguos meses romanos

Se cree que posteriormente el gobernante romano Numa Pompilio (aprox. del 715 al 673 antes de nuestra era) agregó el mes de Enero (Januaris, por el dios Janus) al principio del año y el de Febrero (Februarius, por el festival de purificación Februa) al final del mismo para disminuir la diferencia entre el año romano y el año solar. Esto llevó al año romano hasta los 355 días. Los días restantes se compensaban agregando un año sí y otro no un nuevo mes luego de Febrero (Mercedinus o Mensis Intercalaris, de unos 22 a 23 días).

Mucho tiempo después (aprox. 425 A.C.) el mes de Febrero se movió a su actual posición entre Enero y Marzo, pero se mantuvo la costumbre de utilizarlo como si fuera el último mes del año, agregándole o restándole días según conviniera para mantener la sincronización con las estaciones.

### 6.1.2. El Calendario Juliano

El intercalado irregular de los días necesarios para mantener sincronizado el calendario romano con la longitud real del año derivó en que el día en que se observaba el equinoccio de primavera empezó a variar. Adicionalmente los

pontífices, encargados de declarar el inicio de los meses y de intercalar los días extras, en ocasiones alteraban las reglas para extender o acortar el cargo de algún funcionario público.

El resultado final fue que el ciudadano común no podía saber por adelantado cuándo se intercalarían días, especialmente si vivía lejos de Roma, lo que implicaba que no sabía la fecha exacta. Por estas y otras razones, se decidió reformar el calendario.

Hacia el año 46 antes de nuestra era, el emperador Julio César decidió que los romanos utilizaran un calendario solar, siguiendo el ejemplo de los egipcios<sup>3</sup>. Para ello, el César consultó el asunto con el astrónomo Sosígenes de Alejandría.

El resultado fue un año de 365 días, con doce meses, en el cual a Febrero (considerado el último mes) se le agregaba un *día bisiesto* (o “leap day”, en inglés) cada 4 años ([Wikipedia, 2006k]). Esto tiene como consecuencia que la duración promedio de un año en el calendario Juliano es de 365,25 días.

Julio César decretó entonces el cambio de calendario, pero dada la confusión reinante con el sistema anterior, el nuevo año 46 A.C. tuvo que alargarse hasta los 445 días. Adicionalmente, el emperador deseaba que el año empezara en el solsticio de invierno (alrededor del 21 de diciembre actualmente). No obstante, el pueblo romano era supersticioso y consideraba de mal agüero un calendario que no empezara con la luna nueva, que ese año caía diez días después del solsticio de invierno (es decir, el actual 1ro de Enero). Ni todo el poder del emperador pudo cambiar esto, y por ello Julio César tuvo que acceder a la superstición ([Cadena, 2000]).

Finalmente, en honor al reformador el quinto mes del año romano (Quintilis) pasó a llamarse Julio (mes de nacimiento de Julio César) en el año 44 A.C. Tiempo después (8 A.C.) el sexto mes (Sextilis) fué renombrado *Augustus* en honor al emperador César Augusto, varias de cuyas hazañas fueron llevadas a cabo en dicho mes<sup>4</sup>.

### 6.1.3. El Calendario Gregoriano

Con la llegada al poder del cristianismo en el Imperio Romano, y su posterior hegemonía en Europa, el calendario Juliano se hizo de uso común. No obstante, con sus 365,25 días era ligeramente más largo que el año vernal equinocial

---

<sup>3</sup>Los egipcios tenían un calendario de 365 días basado en la posición relativa de la estrella Sirio con respecto al Sol (estrictamente hablando, el calendario que usaban los egipcios no era solar, pero se parecía bastante. Ver [Wikipedia, 2006e]).

<sup>4</sup>Además, no se podía permitir que el mes del emperador Augusto fuera más corto que el del emperador Julio, razón por la cual el mes de Agosto se alargó de 30 a 31 días.

(365,2422 días). Aunque la diferencia no es muy grande (unos 0,0078 días), es un sesgo que se iba acumulando a lo largo de los años.

Lo anterior ocasionaba que el inicio de la primavera se iba atrasando progresivamente (cada vez llegaba en una fecha más tardía). Para el siglo XVI, el retraso era aproximadamente de 10 días.

El problema estribaba en que varias fechas importantes del cristianismo habían sido heredadas del calendario lunisolar judío, y muy particularmente la fecha de la Pascua<sup>5</sup>. El cálculo exacto de estas fechas era fundamental desde un punto de vista tanto teológico como práctico: Si las estaciones se desfasaban demasiado, los productos agrícolas utilizados para celebrar algunas fechas podían no estar disponibles.

El Concilio de Trento de 1563 aprobó la búsqueda de un plan para solucionar este problema. Eventualmente, el Papa Gregorio XIII emitió la bula *Inter gravissimas*, implementando parcialmente la solución propuesta por el doctor *Aloysius Lilius* ([Wikipedia, 2006h]).

Esta solución consistía en lo siguiente:

- Empezar a numerar los años a partir del momento en que la tradición colocaba el nacimiento de Jesús de Nazareth<sup>6</sup>.
- Reducir la longitud promedio del año a 365,2425 días. Esto se logró eliminando días bisiestos: Para los años de fin de siglo (por ejemplo, 1600, 1700, 1800, etc.) *NO* se usará la regla de división entre 4 sino la regla de división entre 400. Por eso, los años 1700, 1800 y 1900 son divisibles entre cuatro pero *NO* fueron bisiestos, mientras que 1600 y 2000 sí fueron bisiestos.
- Para compensar por el retraso ya acumulado, se eliminaron días de la historia: Al jueves 4 de Octubre de 1582 le siguió el viernes 15 de Octubre.

Si bien el nuevo calendario Gregoriano solucionaba de manera permanente<sup>7</sup> un viejo problema, no fue aceptado por unanimidad en todos los países. Los países protestantes acusaron a Gregorio de ser el “anticristo”, fraguando una conspiración para que los buenos cristianos no adoraran a Dios en el día correcto.

---

<sup>5</sup>El Primer Concilio de Nicea del año 325 de nuestra era determinó que, en general, el domingo de resurrección es el primer domingo después de la primera luna llena posterior al equinoccio de primavera. Por esa razón, durante la Semana Santa siempre disfrutaremos de luna llena.

<sup>6</sup>Hoy se sabe que este año estaba errado, pues Jesús de Nazareth debe haber nacido antes, entre el año 8 y el año 2 antes de Cristo.

<sup>7</sup>En realidad, aún persiste una diferencia entre el año Gregoriano y el año vernal equinocial. Aunque pequeña, llegará el momento en que será necesario corregirla.

Por ejemplo, Inglaterra, Escocia y los Estados Unidos no se pasaron al nuevo calendario hasta el año 1752 (época en que el ajuste requerido era de 11 días).

El caso de Rusia es muy particular: No aceptaron el calendario Gregoriano hasta pasada la *Revolución de Octubre* de 1917. No obstante, debido a la diferencia de días acumulada, la Revolución de Octubre en realidad sucedió en Noviembre.

Hoy en día el calendario Gregoriano es utilizado uniformemente en todo el mundo para facilitar el intercambio comercial. Sin embargo, muchos países (por ejemplo China) mantienen internamente sus calendarios tradicionales para llevar el registro del paso del tiempo.

## 6.2. Las diferentes escalas de tiempo

Hoy en día es un hecho común que para una determinada magnitud física, tal como la longitud, existan diferentes unidades y escalas de medida (millas, metros, yardas, pies, pulgadas, etc), cada una adaptada a un uso particular y con una herencia histórica dada.

En este sentido, el tiempo es otra magnitud física más, y las escalas para medirlo han sufrido a lo largo de la historia una evolución similar a la de, digamos, las escalas de medición de longitud. Adicionalmente, las exigencias de la tecnología moderna hacen recomendable el desarrollo y mantenimiento de diferentes escalas de tiempo, cada una adaptada a un determinado requerimiento.

A grandes rasgos, en el presente podemos dividir las escalas de tiempo en dos familias: Las asociadas al movimiento de cuerpos celestes (incluyendo la rotación de la Tierra), y las basadas en la oscilación de átomos. En las siguientes secciones describiremos diferentes escalas pertenecientes a ambas familias.

### 6.2.1. Tiempo Solar Verdadero

El *Tiempo Solar Verdadero* (también llamado *Tiempo Solar Aparente*) está basado en la velocidad rotacional aparente de la Tierra con respecto al Sol. Un reloj solar adecuadamente orientado serviría para marcar el paso de esta escala de tiempo.

En este sentido, se puede definir un día solar como dos pasos sucesivos del Sol por encima del meridiano en donde se hace la medición<sup>8</sup>. Evidentemente,

---

<sup>8</sup>De hecho, aquí se originan las expresiones “ante meridiem” (A.M. - antes del meridiano) y “post meridiem” (P.M. - luego del meridiano), refiriéndose ambas al momento en que el Sol pasa justamente por el meridiano local (mediodía).

este es un tiempo de naturaleza *local*, pues solamente es válido en ese lugar (más específicamente, en aquellos puntos que se encuentren sobre el mismo meridiano).

El tiempo solar verdadero así definido presenta importantes problemas porque no es una *escala de tiempo uniforme*. Esto se debe a que la duración del día solar verdadero varía según las estaciones, es decir, el intervalo de tiempo entre un mediodía y el siguiente varía a lo largo del año. Las diferencias en duración pueden llegar a ser de hasta 16 minutos.

Esta variación es debida principalmente a dos razones, que se combinan entre sí:

- *Excentricidad de la órbita terrestre.*
- *Inclinación entre el ecuador celeste y la eclíptica.*

### **Excentricidad de la órbita terrestre**

El planeta Tierra, debido a que tiene una órbita elíptica alrededor del Sol, no posee una velocidad de traslación constante. De acuerdo con la segunda ley de Kepler del movimiento celeste, los cuerpos del sistema solar se mueven más rápido mientras más cerca se encuentren del Sol.

Por esta razón, el movimiento aparente del Sol con respecto a las estrellas fijas es más veloz durante el perigeo que durante el apogeo. Esto ocasiona que los días solares (entendidos como período de una vuelta completa con respecto al Sol) son más cortos durante el mes de Julio y más largos durante el mes de Enero (cuando la Tierra se encuentra en el perihelio).

Para ver esto más claramente piense que, cuando el Sol se “mueve” más rápido, el movimiento de rotación de la Tierra “tarda más” en alcanzarlo. En la figura 6.1 se esquematiza este efecto.

La afirmación anterior puede causarle confusión, pues si Usted vive en el hemisferio norte sabe por experiencia que durante Julio (verano) los días son “más largos”. Lo importante es que recuerde que al decir “días solares” nos referimos al período entre dos pasos sucesivos del Sol por el meridiano local (aproximadamente 24 horas), y no al período de luz.

Note también que esta variación de velocidad tiene un máximo y un mínimo a lo largo del año.

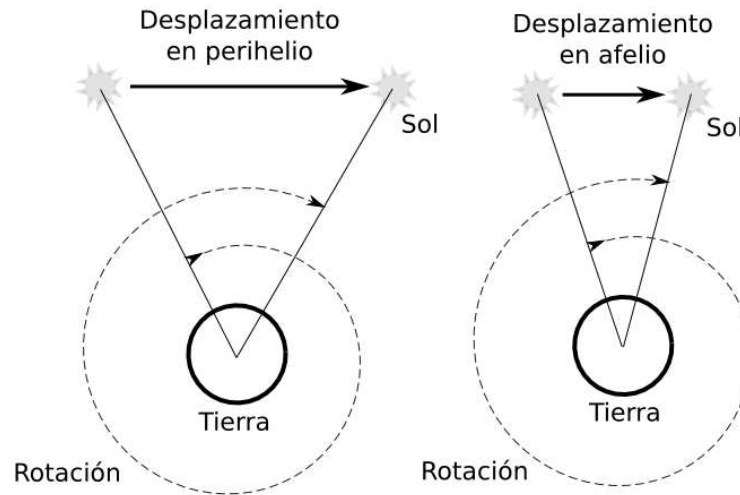


Figura 6.1: Efecto de la excentricidad de la órbita terrestre

### Inclinación entre el ecuador celeste y la eclíptica

Cuando la posición del Sol en la eclíptica está cerca de alguno de los solsticios, el *vector velocidad* se encuentra bastante bien alineado con el ecuador celeste: Por esto, la velocidad aparente del Sol en el cielo es mayor, puesto que entonces se suma mejor al movimiento de rotación de la Tierra. Por otra parte, cerca de los equinoccios hay una inclinación de  $23^{\circ} 27'$ , lo que reduce la componente a lo largo del ecuador. Por lo tanto, en este caso parece que se mueve más lentamente cuando se compara con la velocidad en los solsticios. Véase la figura 6.2 para una ilustración sobre este efecto.

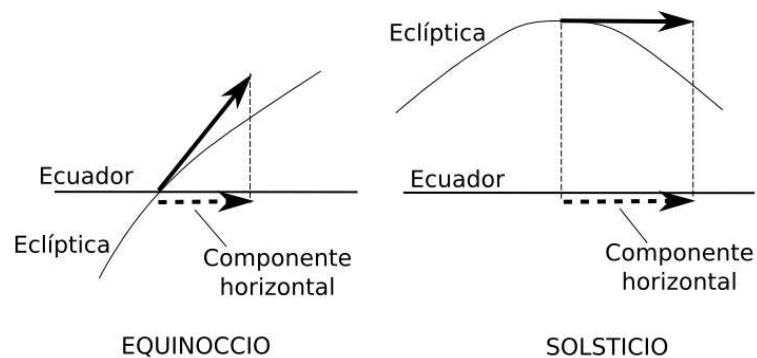


Figura 6.2: Efecto de la inclinación de la órbita terrestre

Esto tiene como consecuencia que a comienzos del invierno y el verano los días son más largos, y más cortos a principios de la primavera y el otoño. Esta



variación de velocidad tiene dos máximos y dos mínimos a lo largo del año.

Ambos efectos (excentricidad e inclinación de la eclíptica) también son responsables de que los días en que el Sol sale (o se pone) más temprano (o más tarde) no correspondan con los respectivos solsticios.

### 6.2.2. Tiempo Solar Medio

Dado que el tiempo solar verdadero presenta tan importantes variaciones, fue entonces necesario definir el *Tiempo Solar Medio* (también llamado *Sol Medio*).

El *Sol Medio* asume que el Sol se mueve a velocidad constante por el cielo siguiendo el ecuador terrestre y su duración es la del día solar durante los equinoccios.

La diferencia entre el Tiempo Solar Verdadero y el Tiempo Solar Medio viene dada por las razones explicadas anteriormente y su combinación produce dos máximos y dos mínimos durante el año:

- Aprox. 11 de Febrero: Unos -14' 16"
- Aprox. 14 de Mayo: Unos +3' 40"
- Aprox. 26 de Julio: Unos -6' 31"
- Aprox. 3 de Noviembre: Unos +16' 28"

Esta diferencia es llamada la *ecuación del tiempo*, y en la figura 6.3 se presenta una gráfica que la representa para el año 2005, calculada gracias a las utilidades proporcionadas en [I.E.S Gaviota, 2006]. Note que en dicha figura se ha graficado Tiempo Solar Medio - Tiempo Solar Verdadero.

Este adelanto y atraso de la posición del Sol en el cielo, combinado con su aumento y disminución de elevación sobre el horizonte a lo largo de las estaciones, genera una curiosa forma llamada *Analema*, que representa la posición del Sol graficada cada día a la misma hora y desde la misma posición.

La figura 6.4 muestra un analema. Nótese que tiene forma de ocho donde el punto más alto corresponde al solsticio de verano, y el inferior al solsticio de invierno.

El Sol Medio es fundamental para la definición del llamado *Año Vernal Equinoccial*, que es el intervalo entre dos pasos sucesivos del Sol Medio por el equinoccio vernal, y que dura 365,2424 días SI. Este concepto a su vez es importante para la elaboración de los calendarios basados en el Sol.

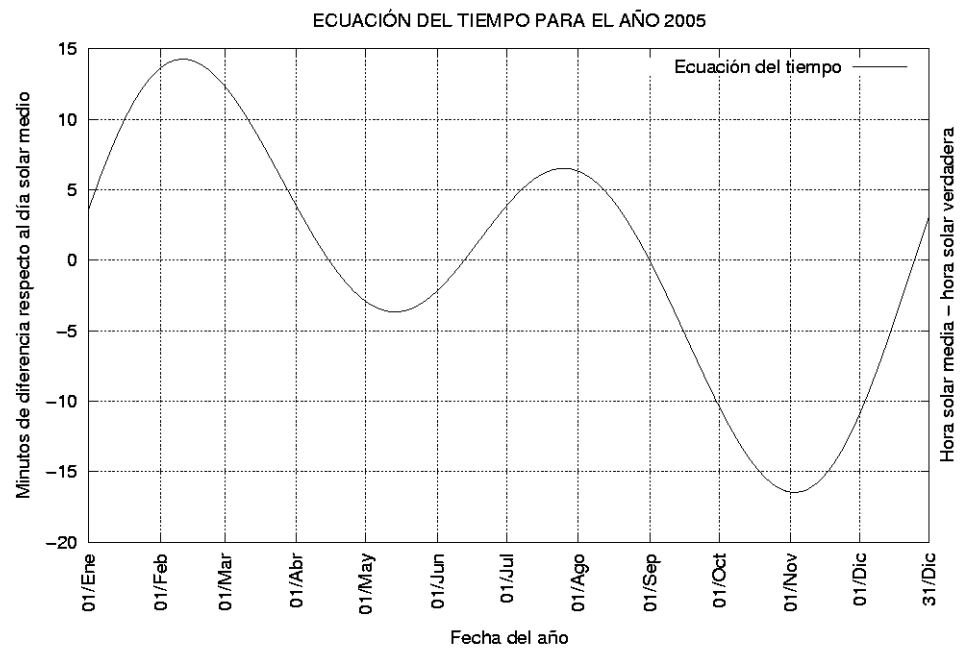


Figura 6.3: Ecuación del tiempo para el año 2005



Figura 6.4: Analema. (Fuente: Wikipedia)

### 6.2.3. Greenwich Mean Time

El Greenwich Mean Time (GMT) es una escala de tiempo basada en el paso del Sol Medio por el meridiano de Greenwich (específicamente por el viejo Observatorio Real de Greenwich, que es el punto de referencia).

Este tiempo está obsoleto pues en 1928 la Unión Astronómica Internacional introdujo el Universal Time (UT) para reemplazarlo.

### 6.2.4. Tiempo Universal

Como se mencionó previamente el UT fue introducido en 1928, reemplazando al GMT. La razón principal para ello fue que el GMT estaba basado en la medición de la posición del Sol, y hay problemas asociados a la medición precisa de la posición del astro rey.

En cambio, el UT se basa en la medición de la posición de referencias astronómicas diferentes al Sol (tales como cuásares), lo que conlleva mayor precisión.

A pesar de su mayor precisión el UT sigue siendo una escala de tiempo no uniforme, pues en el fondo se basa en la medición del período de rotación del planeta y éste presenta anomalías. De hecho, en 1956 el Comité Internacional de Pesos y Medidas decidió que la definición del segundo se haría en función del período de revolución de la Tierra para una época dada, y así el *segundo de efemérides* fue definido como:

*La fracción  $1/31\,556\,925,9747$  del año tropical medio para el 1ro. de Enero de 1900 a las 12 horas.*

Debido a la existencia de las mencionadas anomalías, existen varios tipos de UT:

- UT0: Es el Tiempo Universal definido mediante observaciones de puntos de referencia astronómicos. Inicialmente era medido mediante relojes de péndulo, pero conforme la tecnología de los relojes fue avanzando, se notó la existencia de errores.
- UT1: Cuando a UT0 se le aplican las correcciones debidas al movimiento de los polos (efecto Chandler y otros) obtenemos UT1. Esta escala es la más ampliamente utilizada por los astrónomos y a menudo el término UT se refiere a ella.
- UT2: Debido a que la velocidad de rotación de la Tierra no es constante, UT1 presenta variaciones estacionales relacionadas, entre otras cosas, a

las mareas y el intercambio de energía entre la Tierra y la atmósfera. Al aplicar las correcciones debidas a las variaciones más fuertes y regulares (del orden de 3 milisegundos por día), obtenemos UT2. Esta escala, la más precisa para el Tiempo Universal, sigue siendo irregular y por ello ha caído en desuso después de la aparición de nuevos métodos no astronómicos para la medición del tiempo.

### 6.2.5. Temps Atomique International

Dado que las escalas de tiempo anteriores no eran suficientemente regulares, se desarrollaron relojes cada vez más precisos que permitieron desligarse de la rotación de la Tierra como patrón que definía el tiempo. Estas investigaciones desembocaron en el reloj atómico, que marca el tiempo examinando el comportamiento de los átomos de un material dado, y por tanto la escala de tiempo así construida no depende (o depende muy poco) de factores externos.

Desde mediados de 1950 se empezaron a desarrollar relojes atómicos suficientemente precisos y por ello la 13ra. Conferencia General de Pesos y Medidas celebrada en el año 1967 pudo definir el segundo del Sistema Internacional como:

*La duración de 9 192 631 770 períodos de la onda de la radiación emitida por el átomo de Cesio 133 cuando se realiza la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo.*

En función de esta definición, la Bureau International des Poids et Mesures (BIPM) (Oficina Internacional de Pesos y Medidas), localizada en París, Francia, coordina y promedia los datos provenientes de un gran número de relojes atómicos alrededor del globo para generar una escala de tiempo uniforme llamada Temps Atomique International (TAI) (Tiempo Atómico Internacional).

El objetivo del TAI es llevar a la realidad la definición del segundo SI de la manera más fiel posible. Como tal, sirve de referencia para la construcción de otras escalas con usos más específicos, y por ello su existencia no es muy conocida por el público en general.

Actualmente el TAI tiene una exactitud en relación al segundo SI de aproximadamente  $\pm 2 \cdot 10^{-14}$  (en 1990). Adicionalmente es importante mencionar que de acuerdo a la Teoría General de la Relatividad el tiempo depende del potencial gravitatorio (altitud) y de la velocidad del reloj, por lo cual estos efectos deben tomarse en cuenta. Por ello el TAI considera que el reloj se encuentra a nivel del mar y rota con la Tierra.

### 6.2.6. Tiempo Universal Coordinado

El Universal Time Coordinated (UTC) es una escala de tiempo atómica internacional ampliamente utilizada en el ámbito civil. De hecho, hoy en día prácticamente todos los países del mundo definen sus horas locales en función de UTC<sup>9</sup>, añadiendo o restando un número entero de horas según convenga a su localización geográfica.

En cierta forma, UTC puede verse como la manera de reconciliar el tiempo atómico (TAI) con el tiempo dado por la rotación de la Tierra (Tiempo Universal #1 - UT1).

UTC tiene la misma frecuencia del TAI pero cada cierto tiempo se le añaden (o sustraen) *segundos extras* (llamados "leap seconds") para mantenerlo sincronizado dentro de  $\pm 0,9$  s de UT1. De esta manera, se obtiene la exactitud del tiempo atómico sin divorciarse completamente del fenómeno de la rotación terrestre.

Los "leap seconds" empezaron a usarse el 30 de Junio de 1972<sup>10</sup>, y habitualmente se introducen al final del último minuto del último día de diciembre o del último día de junio, si hace falta. Hasta el momento<sup>11</sup> se han introducido 33 s (todos ellos de retraso), por lo que se cumple la siguiente relación:

$$\text{TAI} - \text{UTC} = 33 \text{ s}$$

El último "leap second" se añadió el 31/Dic/2005. Esto quiere decir que a las 23h 59m 59s, siguió las 23h 59m 60s, y luego las 0h 0m 0s del 01/Ene/2006. A partir de ese momento, la relación entre TAI y UTC es la que se presenta arriba.

Por otra parte, ya se ha decidido<sup>12</sup> que se *agregará* un nuevo "leap second" a finales del próximo Diciembre 2008.

Lo anterior significa que la secuencia de los segundos a final de año será la siguiente:

- 2008/Diciembre/31 - 23h 59m 59s,
- 2008/Diciembre/31 - 23h 59m 60s
- 2009/Enero/01 - 0h 0m 0s

<sup>9</sup>En algunos entornos, particularmente el militar, UTC es llamado "Zulu time".

<sup>10</sup>Previamente se utilizaba un sistema que buscaba mantener UTC sincronizado con el promedio de UT2 del año previo, introduciendo múltiplos de 100 milisegundos (aproximadamente). Puede ver una relación de los "leap seconds" introducidos hasta ahora en [http://hpiers.obspm.fr/eop-pc/earthor/utc/UTC-offsets\\_tab.html](http://hpiers.obspm.fr/eop-pc/earthor/utc/UTC-offsets_tab.html)

<sup>11</sup>Esta sección fue revisada por última vez en julio del 2008.

<sup>12</sup>Puede consultar el boletín en <http://hpiers.obspm.fr/eoppc/bul/bulc/bulletinc.36>

Por ello, a partir del 01/Enero/2009 la relación TAI/UTC será:

$$\text{TAI} - \text{UTC} = 34 \text{ s}$$

La decisión de agregar o no los “leap seconds” depende del IERS, que es la institución encargada de proporcionar los parámetros asociados a la orientación y rotación de la Tierra.

### 6.2.7. Tiempo GPS

También llamado GPS Time (GPST), el tiempo GPS es el utilizado como referencia para las aplicaciones relacionadas con el sistema de posicionamiento global por satélite del Departamento de Defensa de los EE.UU.

El GPST es un tiempo de naturaleza atómica que no es alterado por “leap seconds”. Toma como época de origen las 00:00 UTC de la noche del 5 al 6 de enero de 1980. Dado que para esa fecha se habían introducido 19 “leap seconds”, la siguiente expresión es válida:

$$\text{TAI} - \text{GPST} = 19 \text{ s}$$

Un concepto adicional importante es la llamada *semana GPS*. Ésta empieza la noche del sábado al domingo, de modo tal que el 17 de marzo del 2004 correspondió a la semana GPS 1262. Las semanas GPS tienen un ciclo de 1024, y el primer ciclo se alcanzó en la noche del 21 al 22 de Agosto de 1999, llamado “GPS Week Rollover”.

### 6.2.8. Tiempo Loran-C

El término LORAN, que significa “Long Range Navigation” (Navegación de Largo Alcance), corresponde a una cadena de transmisores de radiofrecuencia de amplio alcance que permiten conocer con cierta precisión (aproximadamente 0,25 NM) la posición de un receptor sobre la superficie terrestre.

Los transmisores pertenecientes a dicha *cadena* (o “chain”, en inglés) poseen relojes atómicos que están sincronizados entre sí. Estos relojes no son alterados por “leap seconds”, lo que hace que se separe progresivamente de UTC.

La época de inicio de los relojes atómicos del sistema Loran-C fue las 0h del 01/Ene/1958.

# Cartografía Aeronáutica

---

## 7.1. Introducción

La navegación, ya sea por tierra, mar o aire, está íntimamente ligada a la utilización de *mapas* o *cartas*, prefiriéndose este último vocablo en navegación. Las cartas se definen como las representaciones, sobre un plano y a tamaño reducido, de la superficie terrestre y ciertas características asociadas a la misma (p.e. altura, instalaciones, caminos, etc.).

El gran problema asociado a la construcción y utilización de cartas es que la superficie de la Tierra **no puede** representarse con fidelidad en ninguna carta. Esto se debe a que una esfera *no es una superficie desarrollable*, es decir, no es posible convertirla a un plano sin generar distorsiones. Es el mismo problema que enfrentaríamos si intentáramos convertir la cáscara de una naranja en un plano sin alterarla.

Por contraste, superficies que sí son desarrollables son los cilindros y los conos. En ambos casos, basta con cortar dichas superficies por un lugar conveniente y seguidamente las podemos estirar sin deformarlas y convertirlas en planos.

Por esta razón, la práctica común al construir una carta consiste en *proyectar* la superficie de la Tierra sobre una de estas tres superficies (plano, cono o cilindro). Dicha proyección consiste en escoger un conjunto de reglas geométricas y aplicarlas sistemáticamente a toda la superficie que se interesa proyectar<sup>1</sup>.

Entonces, como las cartas de navegación en realidad son proyecciones de la superficie terrestre, es conveniente estudiar primero las características de las proyecciones para entender luego las de las cartas.

---

<sup>1</sup>La importancia de las proyecciones en la construcción de las cartas se refleja en el nombre común que le damos a éstas: "mapas". Matemáticamente, un "mapa" es una relación de uno a uno entre un conjunto (en este caso, la superficie terrestre) y otro conjunto (la superficie de proyección).

## 7.2. Propiedades de las proyecciones

Existe un gran número de tipos diferentes de proyecciones según el conjunto de reglas que se escojan para hacerla (por ejemplo: punto de origen, tipo de superficie de proyección, posición de la superficie, etc.). Cada uno de estos conjuntos de reglas introduce diferentes tipos de distorsiones, que son inevitables, y en base a éstas se puede a su vez definir diferentes propiedades de la proyección.

La razón de que existan tantos tipos de proyecciones diferentes es que estas propiedades las hacen adecuadas para un uso u otro, según lo que se desee. En las siguientes secciones estudiaremos las propiedades más importantes que pueden tener las proyecciones, y por ende, las cartas hechas con ellas.

### 7.2.1. Conformidad

La *conformidad* es una de las propiedades más importantes que se buscan en una carta aeronáutica. Un *mapa conforme* es aquél que preserva los ángulos (y por tanto, las formas) a nivel local. Esto significa que las formas de características tales como deltas, ríos, etc. son reconocibles, pues la distorsión que sufren no es grande.

Otra característica de las proyecciones conformes es que, en los alrededores de un punto dado, la escala es la misma en todas direcciones<sup>2</sup>, pero esto **NO** significa que la escala sea la misma en toda la carta.

La tercera gran característica asociada a la propiedad de conformidad es que las líneas de la *gratícula*<sup>3</sup> proyectada (es decir, meridianos y paralelos) son perpendiculares entre sí. Tenga muy en cuenta que esto no implica que dichas líneas sean rectas.

### 7.2.2. Equivalencia

Una proyección es *equivalente* o *autállica* si mantiene las proporciones entre las áreas representadas. Esto quiere decir que si un país dado **A** tiene el doble del área que un país **B**, en una proyección equivalente dicha proporción se mantiene.

Por ejemplo, en las Figuras 7.1 y 7.2 (tomadas de [Furuti, C. A., 2006]) se representan los tamaños relativos entre el continente africano y la isla de Groenlandia

---

<sup>2</sup>Si se piensa un poco sobre el asunto, se llega a la conclusión de que esto es una consecuencia necesaria del hecho de que se mantengan las formas.

<sup>3</sup>La gratícula es la red que forman las líneas del sistema de coordenadas esféricas latitud-longitud.



al utilizar una proyección equivalente (Mollweide) y otra que no lo es (Mercator).



Figura 7.1: Proyección Mercator (no equivalente): África vs. Groenlandia



Figura 7.2: Proyección Mollweide (equivalente): África vs. Groenlandia

Las proyecciones equivalentes o autálicas son de escasa utilidad para la navegación, pero por otra parte son muy útiles cuando se quiere presentar información que ha de compararse a simple vista, como población, producción industrial, etc., o para elaborar atlas escolares.

### 7.2.3. Equidistancia

Se dice que una proyección es *equidistante* cuando posee un conjunto bien definido y completo de líneas a lo largo de las cuales la escala se mantiene constante.

Al indicar que *posee un conjunto bien definido y completo de líneas*, nos referimos al hecho de que muchas proyecciones tienen unas pocas líneas a lo largo de las cuales la escala se mantiene constante (a menudo llamadas líneas *automecoicas*). No obstante, en las cartas equidistantes el número de líneas que tienen esta propiedad es mucho más grande.

Por ejemplo, es posible crear una carta con una proyección equidistante que esté centrada en una ciudad dada **A**, y entonces se podría calcular con exactitud la distancia entre tal ciudad **A** y cualquier otra ciudad que se represente en la carta.

Las cartas equidistantes a menudo distorsionan mucho los ángulos y áreas, y por ello tienen una utilidad limitada. Sin embargo es posible obtener pocas distorsiones si el área representada es pequeña.

#### 7.2.4. Dirección

Otra propiedad importante de las proyecciones es la referida a si distorsionan, y de qué manera, las direcciones. Por ejemplo, una proyección que muestra de forma correcta todas las direcciones desde su centro a cualquier otro punto de la carta se llama *azimutal*.

Hay al menos dos maneras diferentes de entender la dirección: en función del círculo máximo y en función del rumbo, y ambas maneras definen líneas muy importantes:

##### Líneas Ortodrómicas

Una línea *ortodrómica* (también llamada línea *geodésica*) es aquella que se traza siguiendo el arco de un círculo máximo.

Algunos tipos de proyecciones, tales como la *gnomónica*, convierten las ortodrómicas en líneas rectas. Esta es una propiedad deseable para la navegación, siempre que las demás distorsiones generadas no sean muy grandes.

En las Figuras 7.3 y 7.4 se presentan una línea ortodrómica y su correspondiente proyección gnomónica<sup>4</sup>.

##### Líneas Loxodrómicas

Por contraste, las líneas *loxodrómicas* o “líneas de rumbo” son aquellas que se trazan si se sigue un rumbo constante sobre la superficie terrestre. Dada su definición estas líneas tienen la característica de que siempre cruzan a los meridianos y paralelos con ángulos constantes.

Seguir una loxódroma es muy cómodo para el navegante, pues esencialmente lo que hay que hacer es mantener un rumbo fijo en la brújula (compensando por la declinación magnética, por supuesto), y por ello sería deseable que una carta representara las líneas loxódromas como rectas. Sin embargo, no debe olvidarse que desde el punto de vista de economía en distancia lo mejor es seguir una línea ortodrómica.

---

<sup>4</sup>Tomadas de [Polkin, J. C., 1997].

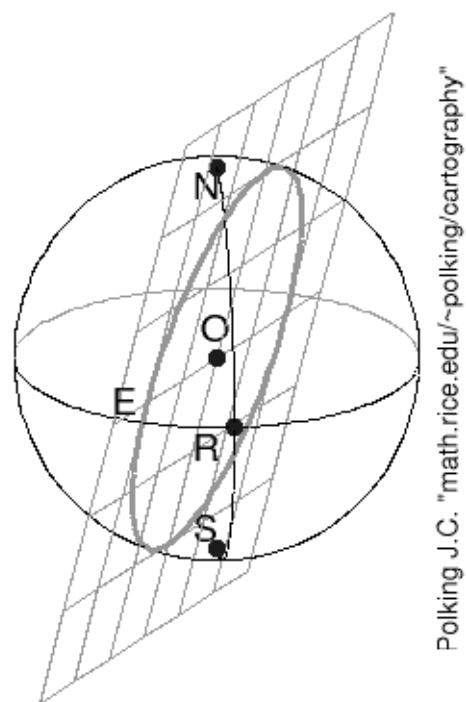


Figura 7.3: Línea Ortodrómica

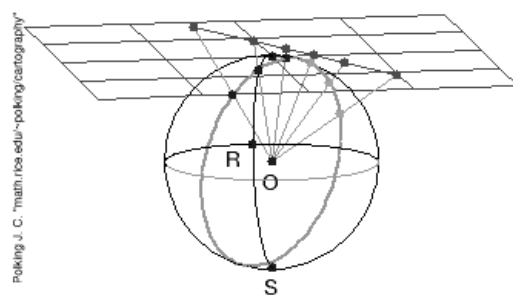


Figura 7.4: Proyección Gnomónica de una línea ortodrómica

Las diferencias entre loxódromas y ortódromas son pequeñas cerca del ecuador y grandes en los polos, dado que la primera traza una espiral infinita sin terminar de llegar al polo, como se muestra en la Figura 7.5 (tomada de [Polkin, J. C., 1997]).

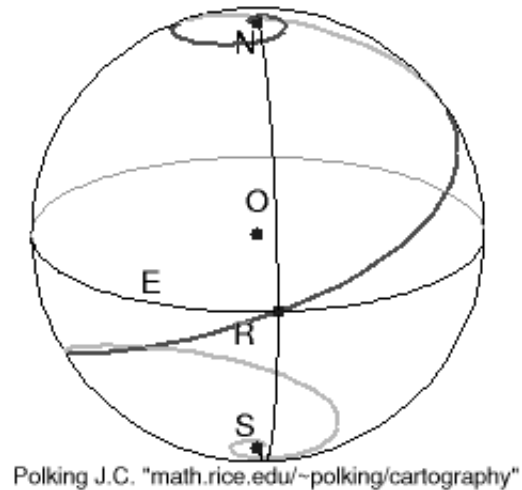


Figura 7.5: Línea Loxodrómica

En la Figura 7.6 (tomada de [Adsuar, 2002]) se trazan sobre un globo terráqueo ambas líneas para poder apreciar mejor la diferencia.

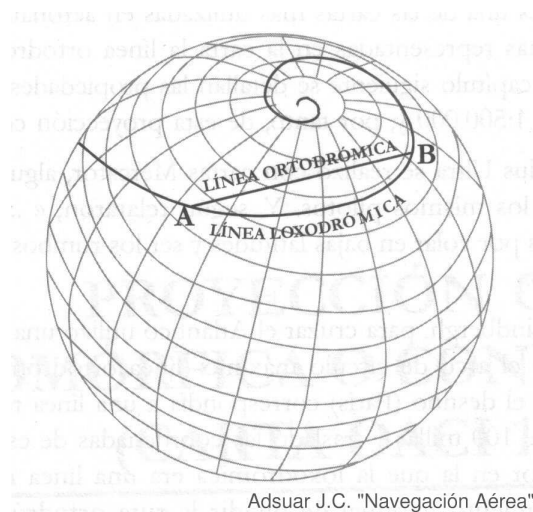


Figura 7.6: Líneas Loxodrómicas y Ortodrómicas sobre el globo terráqueo

Como se mencionó, algunas proyecciones (tales como la Mercator) representan las líneas loxodrómicas como rectas, mientras que en las proyecciones gnomónicas son las líneas ortodrómicas las que tienen esta propiedad. El preferir una u otra dependerá de la aplicación que recibirá la carta.

Para finalizar esta sección, es importante resaltar cómo el ángulo de corte entre una loxódroma dada y los meridianos es siempre el mismo, ya sea que la grátícula esté o no deformada.

## 7.3. Clasificación de las proyecciones

Dada la gran cantidad de proyecciones diferentes, su clasificación es una tarea compleja. Las proyecciones pueden dividirse según diversos criterios, y los principales se presentan a continuación.

### 7.3.1. Tipo de superficie de proyección

La proyección debe realizarse directamente sobre un **plano** o sobre una superficie desarrollable, por lo que se tienen entonces tres posibilidades básicas en total: sobre planos, sobre cilindros y sobre conos, como se muestra en las Figuras 7.7, 7.8 y 7.9.

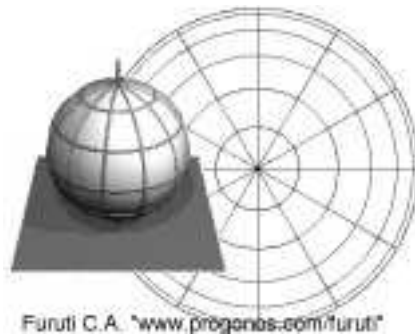


Figura 7.7: Proyección plana

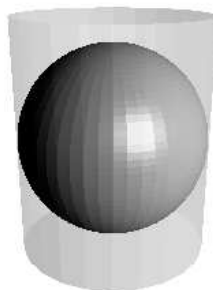


Figura 7.8: Proyección cilíndrica



Figura 7.9: Proyección cónica

### 7.3.2. Orientación de la superficie de proyección

Así como la superficie de proyección es un parámetro importante, también lo es la orientación de dicha superficie con respecto al plano formado por el ecuador. En función de este criterio existen tres orientaciones principales:

- **Proyecciones Normales:** cuando el eje de la superficie de proyección es normal (perpendicular) al plano del ecuador. En el caso de los planos, se toma como eje una recta perpendicular al mismo.
- **Proyecciones Transversas (o transversales):** en este caso el eje de la superficie de proyección es paralelo al plano del ecuador.
- **Proyecciones Oblicuas:** cuando no se cumplen ninguno de los dos criterios anteriores.

Si combinamos las proyecciones según el tipo de superficie y su orientación obtendremos las posibilidades mostradas en las Figuras 7.10 a 7.18 <sup>5</sup>.

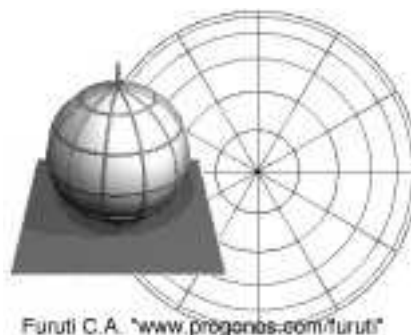


Figura 7.10: Proyección Plana-Normal

<sup>5</sup>Con imágenes tomadas de [Furuti, C. A., 2006].



Figura 7.11: Proyección Plana-Transversa



Figura 7.12: Proyección Plana-Oblicua

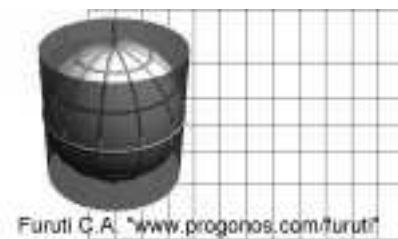


Figura 7.13: Proyección Cilíndrica-Normal



Figura 7.14: Proyección Cilíndrica-Transversa

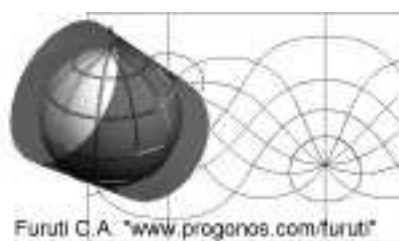


Figura 7.15: Proyección Cilíndrica-Oblicua



Figura 7.16: Proyección Cónica-Normal

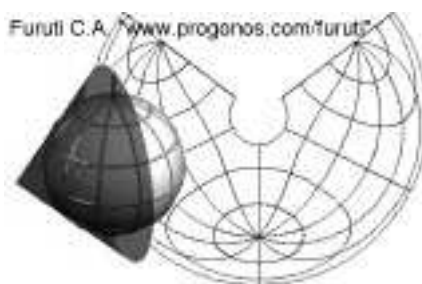


Figura 7.17: Proyección Cónica-Transversa



Figura 7.18: Proyección Cónica-Oblicua



Note que la orientación en cierta manera indica en donde se tocan (si lo hacen) la superficie de proyección y la superficie terrestre. De este modo tenemos que la proyección plana (también llamada **azimutal**) normal es también una proyección **polar** (es decir, la Tierra y la superficie de proyección se tocan en un polo); en cambio una proyección cilíndrica normal es **ecuatorial**, mientras que una proyección cilíndrica transversal es **meridiana**.

### 7.3.3. Posición de la superficie de proyección

Hasta ahora se han visto ejemplos en que la superficie de proyección y la superficie proyectada (la terrestre) se tocaban en un único punto, lo que implicaba que se hablaba de proyecciones **tangentes**.

No obstante, un gran número de proyecciones muy útiles “**cortan**” a la Tierra en varios puntos, estando entonces ante la presencia de proyecciones **secantes**.

En las Figuras 7.19 y 7.20 se compara una proyección cilíndrica ecuatorial tangente con una cilíndrica ecuatorial secante.

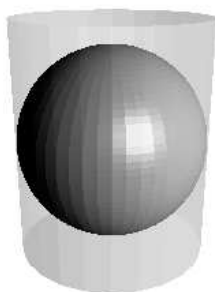


Figura 7.19: Proyección Cilíndrica Ecuatorial Tangente

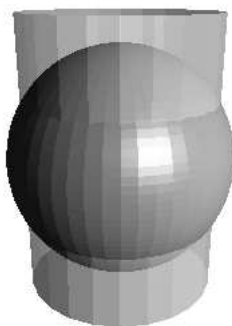


Figura 7.20: Proyección Cilíndrica Ecuatorial Secante

Es muy importante notar que en las proyecciones secantes hay al menos dos círculos de la esfera (los de intersección) en donde la deformación es **cero**. Si la proyección es normal, dichos círculos corresponderán a paralelos, y como ya se comentó tales paralelos serán **paralelos automecoicos**.

Estas características son particularmente notables en las proyecciones cónicas. La Figura 7.21 (tomada de [Adsuar, 2002]) presenta dos proyecciones cónicas normales en sus formas tangente y secante, poseyendo uno y dos **paralelos automecoicos**, respectivamente.

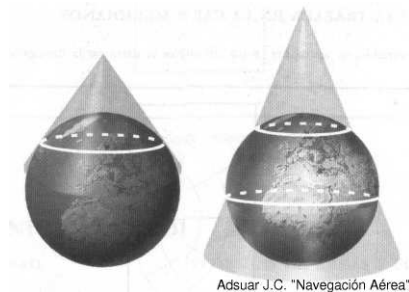


Figura 7.21: Proyecciones cónicas tangentes y secantes

La proyección cónica normal secante posee ciertas propiedades que la hacen particularmente útil para la navegación aérea. Por ello, la OACI la ha elegido como la proyección preferida de varios tipos importantes de cartas aeronáuticas.

#### 7.3.4. Posición del punto de proyección

Finalmente, a menudo las líneas de proyección que se utilizan para construir las proyecciones parten de un punto común<sup>6</sup>. Cuando esto es así, genera otra manera muy común de clasificar las proyecciones:

- **Proyecciones Gnomónicas:** el punto de origen de la proyección es el centro de la Tierra.
- **Proyecciones Estereográficas:** en estos casos, el origen está colocado en un punto de la superficie terrestre diametralmente opuesto al punto de tangencia del plano de proyección.
- **Proyecciones Escenográficas:** el punto de origen está situado fuera de la Tierra, a una distancia *finita*.

<sup>6</sup>Sin embargo, es importante aclarar que esto no sucede con todas las cartas. La proyección *ortográfica* es un ejemplo de una proyección cuyas líneas no parten de un punto común.

- **Proyecciones Ortográficas:** son las proyecciones en donde el origen está situado fuera de la Tierra a una distancia *infinita*, por lo que las líneas de proyección son paralelas entre sí.

La Figura 7.22 ilustra las diferentes posiciones del punto para proyecciones planas:

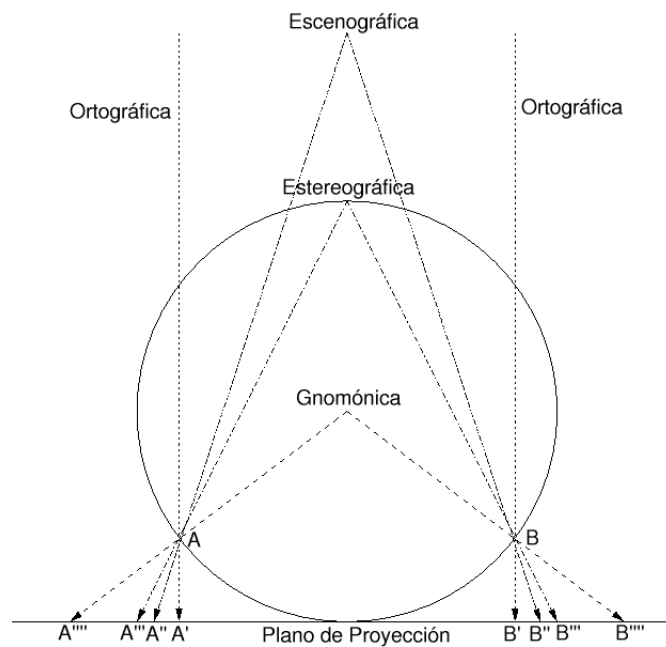


Figura 7.22: Posiciones del punto de proyección (sobre un plano)

## 7.4. Las cartas OACI

La *Organización de Aviación Civil Internacional* (OACI), en su *Anexo 4 - Cartas Aeronáuticas*, ha publicado una serie de normas y métodos recomendados para la elaboración de las mismas. Adicionalmente, y como complemento y ayuda para la puesta en práctica de estas normas, también proporciona el *Manual de Cartas Aeronáuticas*.

Según la OACI, el diseño de las cartas aeronáuticas debe tomar en cuenta una serie de factores, entre los cuales se pueden mencionar:

- Debe utilizarse una proyección común.

- Las escalas utilizadas deben tener valores fácilmente comprensibles.
- Debe facilitarse la transición de una carta a otra durante el vuelo mediante una adecuada selección de alturas, construcciones u otra información relativa al terreno.
- Deberían publicarse simultáneamente las cartas que tienen conexión entre sí, ya sean cartas nuevas o sus revisiones.

#### 7.4.1. Cartas OACI obligatorias

El Anexo 4 exige que cada país garantice la disponibilidad de seis (6) tipos diferentes de cartas aeronáuticas que se consideran **obligatorias**:

1. *Plano de obstáculos de aeródromo - OACI, Tipo A*: para aquellos aeródromos donde hay obstáculos destacados en el área de la trayectoria de despegue.
2. *Carta topográfica para aproximaciones de precisión - OACI*: para todos los aeródromos con pistas de aproximación de precisión de Categorías II y III.
3. *Carta de navegación en ruta - OACI*: para todas las zonas donde se hayan establecido regiones de información de vuelo (FIR).
4. *Carta de aproximación por instrumentos - OACI*: para aquellos aeródromos donde se hayan establecido procedimientos de aproximación instrumentales.
5. *Plano de Aeródromo/Helipuerto - OACI*: necesario para todos aquellos aeródromos/helipuertos *regularmente* utilizados por la aviación civil internacional.
6. *Carta aeronáutica mundial - OACI, 1:1 000 000*: publicada de acuerdo a lo indicado en el Apéndice 5 del Anexo 4.

#### 7.4.2. Cartas OACI condicionales

Adicionalmente a las anteriores, existen cinco cartas de publicación **condicional**, lo que significa que han de presentarse determinadas circunstancias para su publicación:

1. *Plano de obstáculos de aeródromo - OACI, Tipo C*: necesario sólo si en el AIP **NO** se publican los datos sobre obstáculos que requieren los explotadores para generar sus procedimientos.

2. *Carta de área - OACI*: requerida si las rutas o los requisitos de notificación de posición son complicados y no pueden indicarse adecuadamente en la carta habitual para ello (*Carta de navegación en ruta - OACI*).
3. *Carta de salida normalizada - vuelo por instrumentos - OACI*: llamadas cartas SID, se publican cuando existe una salida normalizada de este tipo y no se pueda indicar con la claridad suficiente en la *Carta de área - OACI*.
4. *Carta de llegada normalizada - vuelo por instrumentos - OACI*: éstas son las cartas STAR y se publican cuando existe una llegada normalizada y no se pueda indicar con la claridad suficiente en la respectiva *Carta de área - OACI*.
5. *Carta de aproximación visual - OACI*: necesaria para aquellos aeródromos en los que se cumple al menos una de las siguientes condiciones:
  - Sólo existen instalaciones y servicios de navegación limitados.
  - No existen servicios de radiocomunicaciones.
  - No existen cartas a escala 1:500 000 del aeródromo y sus alrededores.
  - Se han establecido procedimientos de aproximación visual.

### 7.4.3. Cartas OACI opcionales

Finalmente, existen otras seis cartas denominadas **opcionales** porque la OACI delega a las autoridades de cada país la decisión sobre su publicación si consideran que estas cartas contribuirán a la seguridad, regularidad y eficiencia de las operaciones aéreas.

Tales cartas opcionales son:

1. *Plano de obstáculos de aeródromo - OACI, Tipo B*: se publica como ayuda para determinar las alturas críticas en algún procedimiento.
2. *Plano de aeródromo para movimientos en tierra - OACI*: se publica sólo cuando en el *Plano de Aeródromo/Helipuerto - OACI* no puede indicarse con suficiente claridad los datos necesarios para el movimiento de aeronaves en las calles de rodaje.
3. *Plano de estacionamiento y atraque de aeronaves - OACI*: publicado cuando, por la complejidad del terminal aéreo, no puede señalarse en el *Plano de Aeródromo/Helipuerto - OACI* ni en el *Plano de aeródromo para movimientos en tierra - OACI* suficiente información con respecto al estacionamiento de las aeronaves.

4. *Carta aeronáutica - OACI 1:500 000*: cuando los requisitos para la navegación visual indiquen que puede sustituir o complementar a la *Carta aeronáutica mundial - OACI, 1:1 000 000*.
5. *Carta de navegación aeronáutica - OACI, escala pequeña*: igual que la anterior.
6. *Carta de posición - OACI*: son cartas útiles para mantener un registro continuo de la posición de una aeronave en vuelo sobre zonas oceánicas o escasamente pobladas.

#### 7.4.4. La carta OACI 1:500 000

Esta carta está basada en la llamada **proyección cónica conforme de Lambert**, que es una proyección cónica normal secante. Es ampliamente utilizada para la navegación aérea visual<sup>7</sup>, considerándose una de las cartas básicas por proporcionar información visual a una escala adecuada.

A continuación se resumen las propiedades más importantes de este tipo de carta:

- Es conforme.
- Los paralelos son arcos de círculo concéntricos, casi equiespaciados.
- Las líneas de grátícula se cortan perpendicularmente entre sí.
- Es prácticamente equidistante.
- Las líneas ortodrómicas se representan aproximadamente como líneas rectas.

La OACI recomienda que esta proyección se utilice entre el ecuador y los 80° de latitud, en bandas de 2° de latitud. Los paralelos automecoicos de cada banda se situarían 40' al sur del paralelo norte y 40' al norte del paralelo sur, pero esto varía según la carta. Por ejemplo, la carta correspondiente a Barcelona, España (2319-B) usa como paralelos automecoicos 37°10'41" N y 42°49'18" N.

Asimismo, los meridianos deberían indicarse a intervalos de 30', con marcas de graduación a intervalos de 1', tanto para los paralelos como para los meridianos. Los intervalos de 10' se marcarán de manera distintiva.

La denominación de esta carta se hará (cuando sea aplicable) en función del número de referencia de la *Carta aeronáutica mundial - OACI 1:1 000 000*

---

<sup>7</sup>Recuerde que la navegación aérea visual implica baja velocidad, corto o medio alcance y baja o media cota.

correspondiente, agregándosele una letra que indique a qué cuadrante de la carta mundial corresponde:

- A - Noroeste
- B - Nordeste
- C - Sudeste
- D - Sudoeste

Para la carta de ejemplo mencionado arriba (Barcelona, España 2319-B), **2319** se refiere a la carta mundial, y la letra **B** indica el cuadrante nordeste.

Dada su función, esta carta tiene que incluir datos topográficos que tengan importancia para la navegación visual, así como: declinación magnética, espacios aéreos, obstáculos, aeropuertos y aeropuertos, radioayudas, edificaciones, ríos y lagos, autopistas, carreteras, líneas férreas, puntos de referencia (puentes, ruinas, diques, faros, líneas de alta tensión, etc), fronteras, etc.





# Vectores y Matrices

---

El objetivo de esta sección es repasar los conceptos más básicos sobre el álgebra con vectores y matrices.

## A.1. Definiciones básicas

**Vectores:** Se define un vector como un arreglo lineal de elementos:

$$V = [a_1 a_2 \dots a_n] \quad (\text{A.1})$$

El vector  $V$  en (A.1) tiene  $n$  elementos<sup>1</sup>, diciéndose entonces que es un vector *n-dimensional*. Asimismo, dado que los elementos están arreglados en una sola fila, este tipo de vector es llamado también *vector fila*.

Cuando se utiliza una herramienta de cálculo numérico como **Matlab** u **Octave**, lo habitual es definir un vector fila introduciendo sus elementos entre corchetes:

```
>> V = [ 4   9.3  10.1  -3.3 ]
```

Por otra parte, es posible que los elementos de un vector dado estén arreglados en forma de una única columna, de la siguiente manera:

$$W = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

---

<sup>1</sup>Los elementos de un vector pueden ser números reales, números complejos, funciones u operadores.

El vector  $W$  es entonces un *vector columna  $n$ -dimensional*.

En Matlab u Octave, este tipo de vectores se definiría de la siguiente manera:

```
>> W = [ 2.0; 7.3; -8.1; 0.3 ]
```

**Matrices:** Se define una matriz como un arreglo rectangular de elementos:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

La matriz  $A$  en (A.3) tiene  $n$  filas y  $m$  columnas, diciéndose entonces que es una matriz  $n \times m$ . Los elementos  $a_{ij}$  (donde  $i$  denota la fila y  $j$  la columna) pueden ser números reales, números complejos, funciones u operadores.

Puede verse con facilidad que la matriz  $A$  puede descomponerse en  $n$  vectores filas o en  $m$  vectores columnas.

Para introducir una matriz en Matlab u Octave, es necesario hacer algo semejante a lo que se hizo para los vectores:

```
>> A = [ 2 3 4; 0 7 8; -8 -4 3; 7 9 -3 ]
```

En este ejemplo, la matriz  $A$  posee 4 filas y 3 columnas. El elemento  $a_{32} = -4$ .

**Igualdad de matrices:** Dos matrices  $A$  y  $B$  serán iguales si y sólo si tienen las mismas dimensiones  $n \times m$  y la igualdad  $a_{ij} = b_{ij}$  se cumple para todos los elementos.

**Matriz cuadrada:** Se dice que una matriz  $C_{nm}$  es cuadrada si  $n = m$  (el número de filas es igual al número de columnas). En este caso, se dice que su dimensión es simplemente  $n$ .

**Matriz diagonal:** Se dice que una matriz  $D_{nn}$  (cuadrada) es diagonal si todo elemento donde  $n \neq m$  vale cero.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

**Matriz unitaria o matriz identidad:** La matriz identidad  $I$  es una matriz cuadrada donde los valores de su diagonal son todos 1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

En Matlab u Octave, una manera rápida de generar una matriz identidad es utilizando la función `eye(n)`, donde  $n$  es la dimensión.

```
>> I = eye(4)
```

**Matriz cero o matriz nula:** Es esta una matriz donde los valores de sus elementos son todos 0.

**Matriz traspuesta:** Dada una matriz  $A$ , la *matriz traspuesta de  $A$*  (denotada  $A'$ ) es aquella donde se han intercambiado las filas por las columnas y viceversa, es decir, donde se cumple la igualdad  $a_{ij} = a'_{ji}$ .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Tenga en cuenta que  $(A')' = A$ .

En Matlab u Octave, la matriz traspuesta de  $A$  se obtiene rápidamente utilizando el apóstrofe:  $A'$ .

```
>> Atrans = A'
```

**Matriz simétrica:** Es aquella matriz que cumple  $A = A'$ . Obviamente, debe ser una matriz cuadrada.

**Matriz antisimétrica:** Es aquella matriz que cumple  $A = -A'$ .

**Matriz conjugada:** Si dada la matriz  $A$ , se sustituyen sus elementos por sus conjugados, entonces la matriz resultante  $B$  es la conjugada de  $A$  y se denota  $B = \overline{A}$ . Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2+j & 3 & -1+4j \\ 4-j & 5 & -2-2j \\ 1 & 3-j & 1+3j \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 2-j & 3 & -1-4j \\ 4+j & 5 & -2+2j \\ 1 & 3+j & 1-3j \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

**Matriz conjugada traspuesta:** Es aquella que además de ser la conjugada, también es la traspuesta. Se denota  $\overline{A}' = A^*$ .

Note que  $(A^*)^* = A$ . Además, si todos los elementos de la matriz  $A$  son números reales, entonces la traspuesta  $A'$  es la misma que la conjugada traspuesta  $A^*$ .

**Matriz Hermitiana:** Si una matriz  $A$  tiene elementos complejos, se dice que es una matriz *Hermitiana* si se cumple la relación  $A = A^*$ . Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3-2j \\ 3+2j & 3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

**Matriz Triangular Superior:** Se llaman así aquellas matrices donde se cumple que los elementos  $a_{ij} = 0$  si  $i > j$ . Esto significa que todos los elementos por debajo de la diagonal principal son cero. Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2+j & 3 & -1+4j \\ 0 & 5 & -2-2j \\ 0 & 0 & 1+3j \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

**Matriz Triangular Inferior:** En este caso se cumple que los elementos  $a_{ij} = 0$  si  $i < j$ , es decir, que todos los elementos por encima de la diagonal principal son cero. Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2+j & 0 & 0 \\ 4-j & 5 & 0 \\ 1 & 3-j & 1+3j \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

## A.2. Álgebra de vectores y matrices

Esta sección presenta un repaso de las operaciones más importantes del álgebra con vectores y matrices.

### A.2.1. Adición y sustracción de vectores y matrices

Para que dos matrices  $A$  y  $B$  puedan ser sumadas o restadas, es necesario que ambas tengan las mismas dimensiones (igual número de filas e igual número de columnas). Si eso se cumple, entonces las matrices pueden ser sumadas o restadas término a término:  $A + B = a_{ij} + b_{ij}$  y  $A - B = a_{ij} - b_{ij}$ . Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2+j & 3 & -1+4j \\ 1 & 3-j & -1+3j \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

$$B = \begin{bmatrix} 2+j & 1-j & -1+4j \\ 7 & 2-4j & 2+3j \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 4+2j & 4-j & -2+8j \\ 8 & 5-5j & 1+6j \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 0 & 2+j & 0 \\ -6 & 1+3j & -3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

Otras interesantes propiedades de la suma y resta de matrices con respecto al operador de trasposición (') y el de trasposición conjugada (\*) son las siguientes:

$$\begin{aligned} (A + B)' &= A' + B' \\ (A + B)^* &= A^* + B^* \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Es sumamente fácil sumar o restar matrices con Matlab u Octave:

```
>> AmasB = A+B
>> AmenosB = A-B
```

Los mismos principios anteriores aplican a los vectores: Ambos deben ser de la misma dimensión para poder ser sumados o restados. De hecho, en este sentido es conveniente ver a un vector como una matriz que posee sólo una fila o una columna. Las operaciones con Matlab y Octave también son las mismas.

### A.2.2. Multiplicación de un vector o una matriz por un escalar

Para multiplicar una matriz por un escalar simplemente multiplicamos todos sus elementos por dicho escalar:

$$4 * A = \begin{bmatrix} 4 * 2 & 4 * (3 - 2j) \\ 4 * (3 + 2j) & 4 * 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 - 8j \\ 12 + 8j & 12 \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

En Matlab y Octave esto se logra así:

```
>> C = k*A
```

Los mismos principios anteriores aplican a los vectores. Las operaciones con Matlab y Octave también son las mismas.

### A.2.3. Producto escalar

Dos vectores  $\overline{U}$  y  $\overline{V}$  de igual dimensión  $m$  pueden ser multiplicados entre sí, generándose como resultado un escalar. Esta operación es llamada *producto escalar*<sup>2</sup> y se define así:

$$\overline{U} \cdot \overline{V} = k = \sum_{i=1}^m u_i * v_i \quad (\text{A.19})$$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \overline{U} &= [1 \quad 2 \quad 3] \\ \overline{V} &= [2 \quad 3 \quad 4] \\ \overline{U} \cdot \overline{V} &= 1 * 2 + 2 * 3 + 3 * 4 = 20 \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Para hacer esto con Matlab u Octave, es necesario tener en cuenta que en realidad esto son matrices con una fila o una columna, y por tanto han de ser arreglados adecuadamente usando el operador “transposición” (’):

```
>> k = U*V'
```

---

<sup>2</sup>También se le dice *producto punto* o *producto interno*

Más información sobre la razón de hacer esto en la Sección A.2.4.

Adicionalmente, otra útil expresión relacionada con el producto escalar es la siguiente:

$$\overline{U} \cdot \overline{V} = |\overline{U}| |\overline{V}| \cos \theta \quad (\text{A.21})$$

Donde  $\theta$  es el ángulo entre los dos vectores  $\overline{U}$  y  $\overline{V}$ .

#### A.2.4. Multiplicación de una matriz por otra matriz

Para multiplicar una matriz por otra matriz es necesario que el número de columnas de la primera matriz sea igual al número de filas de la segunda matriz.

Si las dimensiones de la primera matriz  $A$  son  $n \times m$ , y las dimensiones de la segunda matriz  $B$  son  $m \times p$ , entonces la multiplicación entre ellas viene dada por:

$$AB = C = (c_{ij}) = \left( \sum_{k=1}^m a_{ik} * b_{kj} \right) \quad i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, p \quad (\text{A.22})$$

Y las dimensiones de la matriz resultante  $AB$  serán  $n \times p$ .

Al examinar con detalle la Ecuación A.22 podemos ver que en realidad cada elemento  $c_{ij}$  es en realidad el resultado del producto escalar del vector fila  $\overline{A}_i$  por el vector columna  $\overline{B}_j$ .

Un ejemplo de multiplicación de matrices se muestra a continuación:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 * 5 + 3 * (-1) & 2 * 1 + 3 * 2 \\ 1 * 5 + 4 * (-1) & 1 * 1 + 4 * 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

Note que, en general,  $AB$  puede estar definido pero  $BA$  no (recuerde la condición del número de filas y el número de columnas). Adicionalmente, incluso si  $A$  y

$B$  son cuadradas, en general  $AB \neq BA$ . Esto significa que la multiplicación de matrices **no** es conmutativa, y hay que ser muy cuidadoso en mantener el orden de las matrices.

Otras propiedades de la multiplicación de matrices son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 (AB)C &= A(BC) && \text{Asociativa} \\
 (A+B)C &= AC + BC && \text{Distributiva} \\
 C(A+B) &= CA + CB \\
 (AB)' &= B'A' \\
 (AB)^* &= B^*A^*
 \end{aligned} \tag{A.26}$$

En Matlab y Octave la multiplicación de matrices se logra con sencillez:

```
>> C = A*B
```

### A.2.5. Producto vectorial

Dos vectores  $\vec{U}$  y  $\vec{V}$  de igual dimensión **3** pueden ser multiplicados entre sí, generándose como resultado *otro vector*, que es perpendicular a los dos primeros. Esta operación es llamada *producto vectorial*, *producto cruz* o *producto externo*, y se define de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \vec{U} \times \vec{V} &= \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \\
 &= [(u_2 * v_3 - v_2 * u_3) \quad - (u_1 * v_3 - v_1 * u_3) \quad (u_1 * v_2 - v_1 * u_2)]
 \end{aligned} \tag{A.27}$$

Para más detalles sobre la operación *det* (determinante), consulte la Sección A.3.

Otras expresiones relacionadas con el producto vectorial son:

$$\vec{U} \times \vec{V} = |\vec{U}| |\vec{V}| \sin \theta \vec{n} \tag{A.28}$$

Donde  $\theta$  es el ángulo entre los dos vectores iniciales  $\vec{U}$ ,  $\vec{V}$  y  $\vec{n}$  es un vector unitario perpendicular a ambos.

La Ecuación A.28, pero ahora en forma de módulo, nos deja:



$$|\overline{U}x\overline{V}| = |\overline{U}||\overline{V}| \sin \theta \quad (\text{A.29})$$

### A.3. El determinante

El determinante se define como una función  $\det(A)$  que asocia un escalar a una matriz cuadrada  $A$  de dimensión  $n \times n$ . Otra manera de denotar el determinante es  $|A|$ .

El determinante de una matriz de  $2 \times 2$  es fácil de calcular. Sea la matriz  $A$ :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (\text{A.30})$$

Entonces  $\det(A)$  se define como:

$$\det(A) = a * d - c * b \quad (\text{A.31})$$

#### A.3.1. Menor $M_{ij}$

Si de una matriz cuadrada  $A$  de dimensiones  $n \times n$  borramos la fila  $i$ -ésima y la columna  $j$ -ésima, la matriz resultante tendrá dimensiones  $(n - 1) \times (n - 1)$ . El determinante de esta nueva matriz se llama el Menor  $M_{ij}$  de la matriz  $A$ .

#### A.3.2. Cofactor $A_{ij}$

Dado un elemento  $a_{ij}$  de una matriz  $A$ , el cofactor  $A_{ij}$  de dicho elemento se define como:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \quad (\text{A.32})$$

#### A.3.3. Determinante de matrices de dimensiones $n \times n$

Se puede demostrar que el determinante de una matriz  $A$  de dimensiones  $n \times n$  se puede calcular utilizando la expresión:

$$|A| = \sum_{k=1}^n a_{jk} * A_{jk} \quad (\text{A.33})$$

Es decir: Se toman los elementos de una fila<sup>3</sup> cualquiera, se multiplican por los respectivos cofactores y se suman dichos productos.

Por ejemplo, para una matriz  $3 \times 3$ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix} \quad (\text{A.34})$$

Su determinante será:

$$\begin{aligned} |A| &= 1 * (-1^{1+1}) * \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} + 2 * (-1^{1+2}) * \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} + 3 * (-1^{1+3}) * \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ &= 1 * 1 * 2 + 2 * (-1) * (-2) + 3 * 1 * (-3) \\ &= -3 \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

En Matlab y Octave, el determinante de una matriz se encuentra utilizando la función `det()`:

```
>> deterA = det(A)
```

### A.3.4. Matriz adjunta

La matriz adjunta es un importante concepto relacionado con el determinante y con la inversión de matrices (ver Sección A.4).

Dada una matriz  $A$ , su matriz adjunta (denotada  $adj A$  y que llamaremos  $B$ ) es aquella donde cada elemento  $b_{ij}$  es igual al cofactor  $A_{ji}$ . Es decir: Se construye una matriz cuyos elementos son los cofactores de  $A$ , se traspone, y el resultado es  $adj A$ .

---

<sup>3</sup>La Ecuación A.33 también es válida cuando se expresa en columnas en vez de filas.

$$adj A = B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{A.36})$$

Una importante propiedad de las matrices adjuntas es la siguiente:

$$A(adj A) = (adj A)A = |A|I \quad (\text{A.37})$$

### A.3.5. Rango de una matriz

Dada una matriz cualquiera  $A$  de dimensiones  $n \times m$ , se define como el **rango** de  $A$  al orden (número de filas o columnas) de su submatriz cuadrada más grande cuyo determinante **no es cero**.

Por ejemplo, si se tiene la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 5 \\ -2 & 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Es evidente que, como mucho, la submatriz cuadrada más grande será de dimensiones  $3 \times 3$ ; por ello, el rango máximo posible será 3. Al escoger, por ejemplo, a la submatriz:

$$subA = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Su determinante será  $\det(subA) = 22$ . Como  $22 \neq 0$  entonces efectivamente el rango de la matriz  $A$  será 3.

Tanto Octave como Matlab proporcionan la función `rank()` para obtener rápida y fácilmente el rango de una matriz:

```
>> rank(A)
ans = 3
```

## A.4. Inversión de matrices

La inversión de matrices es una importante operación del álgebra lineal. Si para una matriz cuadrada  $A$  existe una matriz  $B$  tal que se cumple:

$$BA = AB = I \quad (\text{A.38})$$

Entonces la matriz  $B$  es la **inversa** de  $A$ , y se denota  $A^{-1}$ . No todas las matrices poseen matriz inversa. Cuando ése es el caso, la matriz es llamada *singular*, *no-invertible* o *degenerada*.

Asimismo, es posible encontrarse con matrices invertibles pero cuyo comportamiento se asemeja a las no-invertibles (especialmente cuando se utilizan ordenadores para calcular la matriz inversa<sup>4</sup>). Este tipo de matrices son llamadas *matrices mal condicionadas*.

Para que una matriz cuadrada  $A$  sea invertible, es necesario que  $\det(A) \neq 0$ . Esto es equivalente a decir que ninguna fila (o columna) de la matriz puede ser expresada como una combinación lineal de las demás filas (o columnas).

Por ejemplo, la matriz A.34 es invertible (su determinante **no** es cero). Sin embargo, considere la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.39})$$

La matriz  $B$  es singular (no invertible) porque la 3ra. fila se puede expresar como combinación lineal de las otras dos:

$$\begin{aligned} B_3 &= B_2 - 2 * B_1 \\ (2 \quad 1 \quad 0) &= (4 \quad 5 \quad 6) - 2 * (1 \quad 2 \quad 3) \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

Algunas importantes propiedades de las matrices inversas son:

---

<sup>4</sup>El problema aparece porque los ordenadores digitales realizan redondeos internos al llevar a cabo sus cálculos, y los efectos de dichos redondeos pueden generar grandes errores cuando se trabaja con matrices mal condicionadas.

$$\begin{aligned}
AA^{-1} &= A^{-1}A = I \\
(AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1} \\
(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= I \\
(A^{-1})^{-1} &= A \\
(A^{-1})' &= (A')^{-1} \\
(A^{-1})^* &= (A^*)^{-1}
\end{aligned} \tag{A.41}$$

Si se combina la Ecuación A.37 con la definición de una matriz inversa, se puede demostrar que:

$$A^{-1} = \frac{adj A}{|A|} \tag{A.42}$$

La anterior es una expresión muy importante que indica que la inversa de una matriz  $A$  se puede calcular si a la matriz adjunta  $adj A$  se le divide por el determinante  $det(A)$ .

Tanto Matlab como Octave permiten la obtención de la matriz inversa utilizando la función `inv()`:

```
>> invA = inv(A)
```



# Sistemas de Ecuaciones

---

Una de las grandes aplicaciones del álgebra de matrices es la resolución de sistemas simultáneos de ecuaciones lineales. Dado que en navegación a menudo se generan sistemas de ecuaciones lineales, es conveniente entonces repasar el manejo de éstos.

## B.1. Introducción

Para ilustrar el concepto se utilizará el siguiente ejemplo adaptado de [Kaw, 2002]:

La telemetría de un cohete nos indica que durante una parte del lanzamiento del mismo los datos de velocidad son los presentados en la Tabla B.1:

Por otro lado, por el análisis teórico se sabe que durante dicha fase de vuelo la función de velocidad del cohete tiene una forma como la indicada en la Ecuación B.1:

$$v(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c \quad (\text{B.1})$$

Tiempo, t (s)	Velocidad, v (m/s)
4	94.5
8	156.3
11	209.1

Tabla B.1: Datos de telemetría de un cohete

Entonces, dado que los tres puntos indicados por los pares de datos  $(t, v)$  de la Tabla B.1 tienen que cumplir la Ecuación B.1, se puede construir el Sistema de Ecuaciones B.2:

$$\begin{aligned}v(t_1) &= a \cdot t_1^2 + b \cdot t_1 + c \\v(t_2) &= a \cdot t_2^2 + b \cdot t_2 + c \\v(t_3) &= a \cdot t_3^2 + b \cdot t_3 + c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}94,5 &= a(4)^2 + b(4) + c \\156,3 &= a(8)^2 + b(8) + c \\209,1 &= a(11)^2 + b(11) + c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}16a + 4b + c &= 94,5 \\64a + 8b + c &= 156,3 \\121a + 11b + c &= 209,1\end{aligned} \tag{B.2}$$

Ahora bien, aprovechando las propiedades del álgebra de matrices el Sistema de Ecuaciones B.2 puede convertirse a la forma matricial indicada en la Ecuación B.3.

$$\begin{bmatrix} 16a + 4b + c \\ 64a + 8b + c \\ 121a + 11b + c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 94,5 \\ 156,3 \\ 209,1 \end{bmatrix}$$

$$a \cdot \begin{bmatrix} 16 \\ 64 \\ 121 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 11 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 94,5 \\ 156,3 \\ 209,1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 16 & 4 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 121 & 11 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 94,5 \\ 156,3 \\ 209,1 \end{bmatrix} \tag{B.3}$$

La Ecuación B.3 representa en forma matricial a un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas. La forma de resolverlo se presentará en la Sección B.3.

En general, un sistema de  $m$  ecuaciones con  $n$  incógnitas del tipo:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= c_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= c_2 \\&\vdots \\a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= c_m\end{aligned} \tag{B.4}$$



Se puede escribir en forma matricial como se indica en la Expresión B.5.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Para simplificar la escritura, denotaremos la Expresión B.5 de la manera indicada en la Ecuación B.6:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{C} \quad (\text{B.6})$$

Donde:

- $\mathbf{A}$ , de dimensiones  $m \times n$ , es llamada la **Matriz de Coeficientes**.
- $\mathbf{C}$ , de dimensiones  $m \times 1$ , es llamado el **Vector de términos independientes**.
- $\mathbf{X}$ , de dimensiones  $n \times 1$ , es llamado el **Vector de incógnitas**.

Es importante notar que hay tantas *ecuaciones* como **filas** tiene la matriz de coeficientes ( $m$ ), mientras que hay tantas *incógnitas* como **columnas** tiene la mencionada matriz ( $n$ ).

## B.2. Sistemas de ecuaciones consistentes e inconsistentes

Se dice que un sistema de ecuaciones es **consistente** cuando existe al *menos una solución*<sup>1</sup> que cumple con todas las ecuaciones planteadas.

Por otra parte, se dice que un sistema de ecuaciones es **inconsistente** si **no** existe una solución que cumpla con todas las ecuaciones que lo componen.

### B.2.1. Diferenciando sistemas consistentes e inconsistentes

Para diferenciar entre sistemas consistentes e inconsistentes, el primer paso es construir la **matriz aumentada**  $[\mathbf{A}:\mathbf{C}]$ . Por ejemplo, sean  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{C}$ :

<sup>1</sup>Lo que implica que puede haber infinitas soluciones.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

Entonces la matriz aumentada  $D$  será:

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_3 \end{bmatrix}$$

El segundo paso es calcular el **rango**  $R_D$  de la matriz aumentada  $D = [A:C]$  y el **rango**  $R_A$  de la matriz  $A$ . Entonces:

- Si  $R_A = R_D$  entonces el sistema de ecuaciones es **consistente**.
- Si  $R_A < R_D$  entonces el sistema de ecuaciones es **inconsistente**.

### B.3. Resolviendo sistemas de ecuaciones consistentes

Si el sistema de ecuaciones es **consistente**, entonces para solucionarlo se puede seguir el siguiente procedimiento:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{X} &= \mathbf{C} \\ \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} \\ \mathbf{I}\mathbf{X} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} \\ \mathbf{X} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} \end{aligned} \tag{B.7}$$

No obstante, hay que tener en cuenta que la matriz  $A$  debe ser **invertible** (no singular) para poder hallar su inversa. Esto implica, por ejemplo, que:

$$\det(A) \neq 0$$

Si  $\det(A) \neq 0$  entonces la solución del sistema es **única**. Por el contrario, si  $\det(A) = 0$  entonces existen **infinitas soluciones**.

**EJEMPLO 1:** Sea el sistema:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Su matriz aumentada  $D = [A:C]$  será:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

El rango de la matriz  $A$  es 2, y el rango de la matriz aumentada  $D$  también es 2, por lo que se concluye que el sistema es consistente.

Además, como el determinante de  $A$  es  $\det(A) = 7$ ,  $A$  no es singular y la solución será única. Entonces:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0,28571 & -0,42857 \\ 0,14286 & 0,28571 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0,28571 & -0,42857 \\ 0,14286 & 0,28571 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**EJEMPLO 2:** Sea el sistema:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Su matriz aumentada  $D = [A:C]$  será:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

El rango de la matriz  $A$  es 1, y el rango de la matriz aumentada  $D$  también es 1, por lo que se concluye que el sistema es consistente.

Sin embargo, el determinante de  $A$  es  $\det(A) = 0$ , por lo que  $A$  es **singular** y habrá infinitas soluciones.

De hecho, el resultado anterior era fácil de predecir en este caso dado que la segunda fila de  $A$  es combinación lineal de la primera columna ( $A_2 = 2 * A_1$ ).

Por ello, las soluciones al sistema de ecuaciones anterior consistirán en todos los pares  $(x_1, x_2)$  tales que cumplan con la relación:

$$2x_1 + 3x_2 = 5 \quad \rightarrow \quad x_2 = \frac{-2}{3}x_1 + \frac{5}{3}$$

**EJEMPLO 3:** Sea el sistema de ecuaciones presentado al inicio de esta sección en la Ecuación B.3 (el de la velocidad del cohete), entonces su solución será:

$$\begin{bmatrix} 16 & 4 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 121 & 11 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 94,5 \\ 156,3 \\ 209,1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,035714 & -0,083333 & 0,047619 \\ -0,678571 & 1,250000 & -0,571429 \\ 3,142857 & -3,666667 & 1,523810 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 94,5 \\ 156,3 \\ 209,1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,30714 \\ 11,76429 \\ 42,52857 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la función de velocidad del cohete teórica presentada en la Ecuación B.1 se convertirá en:

$$v(t) = 0,30714 \cdot t^2 + 11,76429 \cdot t + 42,52857$$

La expresión anterior se grafica en la Figura B.1.

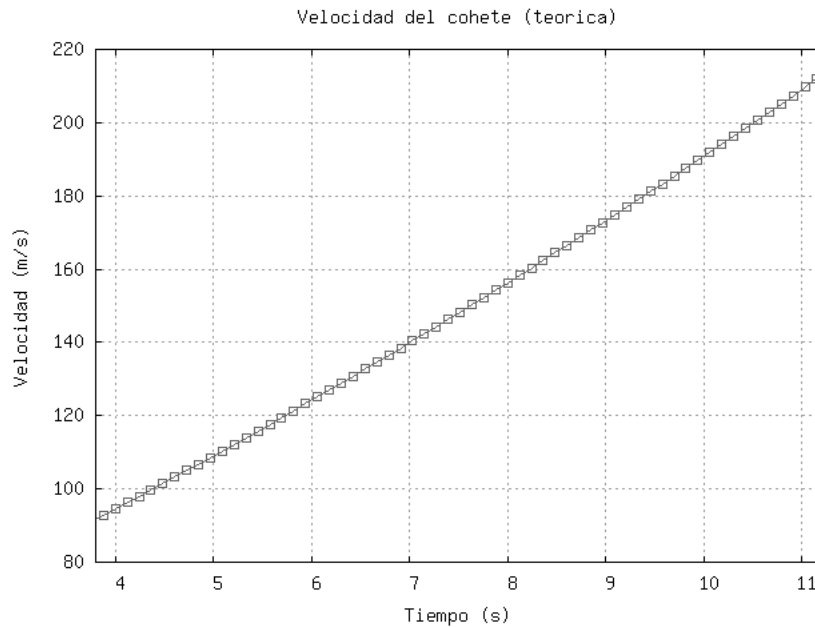


Figura B.1: Velocidad teórica de un cohete

Tiempo, $t$ (s)	Velocidad, $v$ (m/s)
4	94.50
5	112.01
6	121.86
7	145.91
8	156.30
9	164.72
10	193.48
11	209.10

Tabla B.2: Datos de telemetría de un cohete (2)

## B.4. Resolviendo sistemas de ecuaciones inconsistentes

En este caso supóngase que se tiene el mismo cohete presentado en la Sección B.1, pero ahora la tabla de datos obtenidos fuera la Tabla B.1. La gráfica de dichos datos se presenta en la Figura B.2.

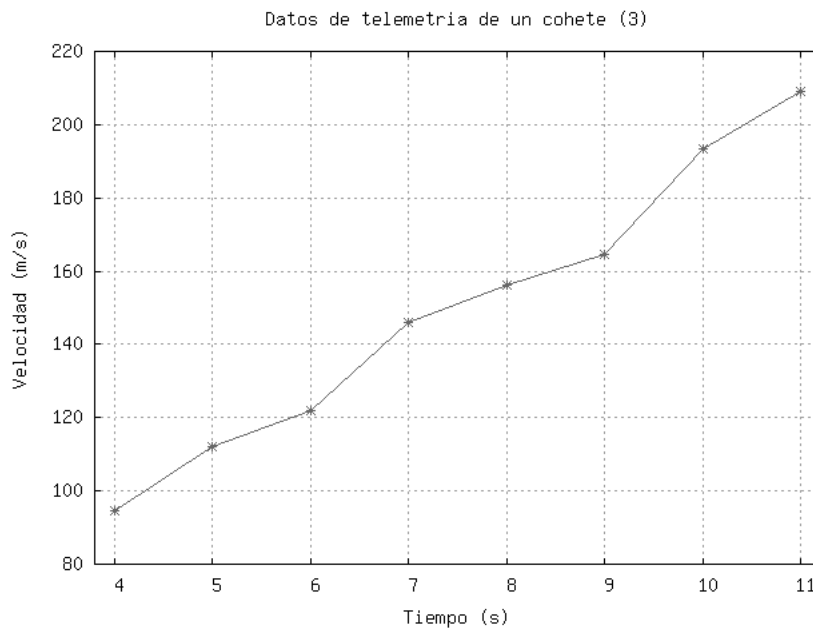


Figura B.2: Datos de telemetría del cohete (2)

Si se sigue considerando que la expresión teórica de la velocidad del cohete es

una expresión de segundo grado (Ecuación B.1), cuando se examina tanto la Figura B.2 como la Tabla B.2 se llega a dos importantes conclusiones:

- Un sistema construido a partir de estos datos tendrá más ecuaciones que incógnitas, generándose una matriz no-cuadrada que no se puede invertir.
- No existe ninguna ecuación de segundo grado que cumpla con todos los puntos mostrados, lo que implica que el sistema presentado es **inconsistente** y no posee solución<sup>2</sup>.

Cuando se trabaja con datos reales, es muy común que los sistemas de ecuaciones generados sean *inconsistentes*. Hay varias razones para esto, siendo las más habituales poseer más datos que incógnitas a resolver y tener datos cuyas mediciones han sido afectadas por el ruido.

Se han desarrollado métodos especiales para encontrarle una “*solución*” a los sistemas de este tipo. Tal solución no es la solución *real* (pues esta “*no existe*”) sino más bien la “*mejor*” solución, según algún criterio previamente determinado.

En las siguientes secciones se presentan dos métodos típicos para la solución de este tipo de problemas.

#### B.4.1. Método de los mínimos cuadrados

El método de los mínimos cuadrados (*Least Mean squares* o **LMS** en inglés) se basa en hallar la solución en la cual la suma de todos los errores (elevados al cuadrado para eliminar el signo) sea la mínima.

Aplicar este método es sencillo mediante el álgebra de vectores y matrices. Dado el sistema presentado en la Ecuación B.6:

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{C}$$

Lo primero es reconocer que  $\mathbf{A}$  no es una matriz cuadrada. El método empieza entonces generando una matriz cuadrada (suceptible de ser invertida) mediante la multiplicación por la transpuesta de  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{A}^T \mathbf{C}$$

---

<sup>2</sup>Note, sin embargo, que si se *ignora* el número adecuado de ecuaciones, se obtendría una matriz cuadrada y el sistema se podría resolver. No obstante, al ignorar unas ecuaciones en favor de otras las “soluciones” así obtenidas serán diferentes entre sí, y en general no serán óptimas.

La nueva matriz  $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$  sí es cuadrada, por lo que a partir de ahora se puede despejar el vector de incógnitas  $\mathbf{X}$  siguiendo un procedimiento similar al utilizado en la Ecuación B.7.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{X} &= \mathbf{A}^T \mathbf{C} \\ (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \mathbf{X} &= (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{C} \\ \mathbf{I} \mathbf{X} &= (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{C} \\ \mathbf{X} &= (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{C} \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Volviendo entonces a los datos presentados en la Tabla B.2, el sistema de ecuaciones correspondiente será:

$$\begin{bmatrix} 16 & 4 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \\ 36 & 6 & 1 \\ 49 & 7 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 81 & 9 & 1 \\ 100 & 10 & 1 \\ 121 & 11 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 94,50 \\ 112,01 \\ 121,86 \\ 145,91 \\ 156,30 \\ 164,72 \\ 193,48 \\ 209,10 \end{bmatrix}$$

Y la solución correspondiente es:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,35655 \\ 10,70560 \\ 47,51536 \end{bmatrix}$$

Entonces, en este caso la función de velocidad del cohete (teórica) será:

$$v(t) = 0,3565 \cdot t^2 + 10,70560 \cdot t + 47,51536$$

Por favor, compare estos resultados con los del Ejemplo 3 de la Sección B.3.

Si se grafica la expresión anterior junto con los datos originales, se obtiene la Figura B.3 donde se aprecia el ajuste que logra el método LMS.

#### B.4.2. Método de los mínimos cuadrados con pesos

En el método anterior se supuso que todos los datos de la telemetría eran de la misma *calidad*, es decir, que las ecuaciones que de ellos se derivan tenían todas igual importancia para la solución del problema.

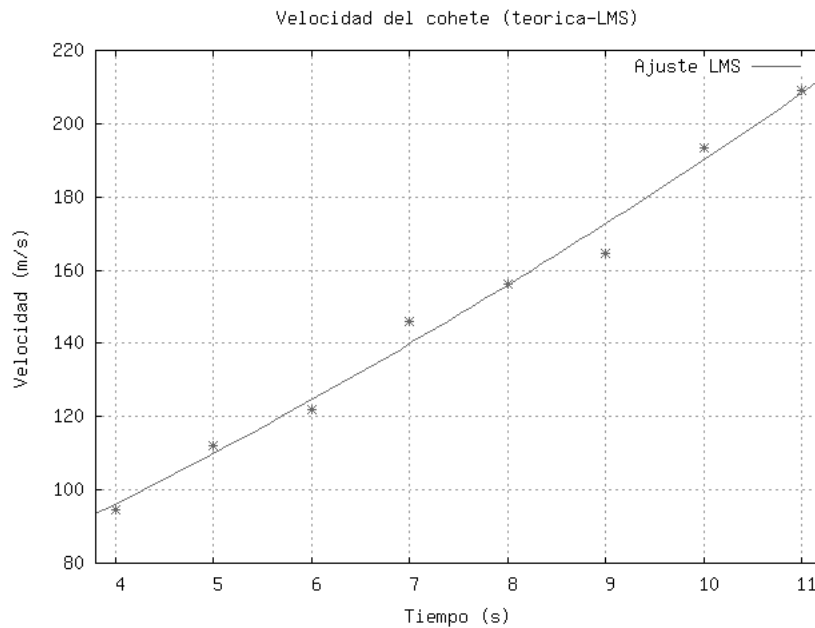


Figura B.3: Velocidad del cohete ajustada con LMS

En la práctica, sin embargo, a menudo es posible obtener información adicional que permite asignar un **peso relativo** a cada ecuación. Esto significa que hay ecuaciones en las que *se confía más*, mientras que en otras *se confía menos*. Se habla entonces del método de los *mínimos cuadrados con pesos*, o *weighted least mean squares (WMS)* en inglés.

Por ejemplo, esta situación se presenta típicamente en los sistemas globales de navegación por satélite (GNSS), como el GPS. El receptor GPS recibe una señal de cada satélite del sistema que esté a la vista, y también posee (o puede derivar) información adicional sobre qué tan confiable es cada una de esas señales. De esa manera, al construir el sistema de ecuaciones (una por cada satélite), el receptor puede hacer un juicio del valor relativo de cada ecuación.

Este juicio de valor entre las ecuaciones se puede hacer de infinitas maneras diferentes, pero una de las más comunes es utilizar variables estadísticas como la dispersión o desviación estándar asociada a cada dato, que permite asignar los pesos relativos.

Supóngase entonces que los datos presentados en la Tabla B.2 vienen ahora acompañados de su respectiva desviación estándar  $\sigma$ , como se indica en la Tabla B.3. La Figura B.4 grafica esos datos con las barras de error asociadas.

Para asignar los pesos relativos se construye entonces una matriz diagonal  $\mathbf{W}$  de dimensión  $n$  (donde  $n$  es el número de ecuaciones), cuyos elementos son los



Tiempo, $t$ (s)	Velocidad, $v$ (m/s)	Desviación estándar $\sigma$ (m/s)
4	94.50	3.9
5	112.01	1.8
6	121.86	6.8
7	145.91	3.2
8	156.30	7.7
9	164.72	1.5
10	193.48	4.2
11	209.10	3.5

Tabla B.3: Datos de telemetría de un cohete (3)

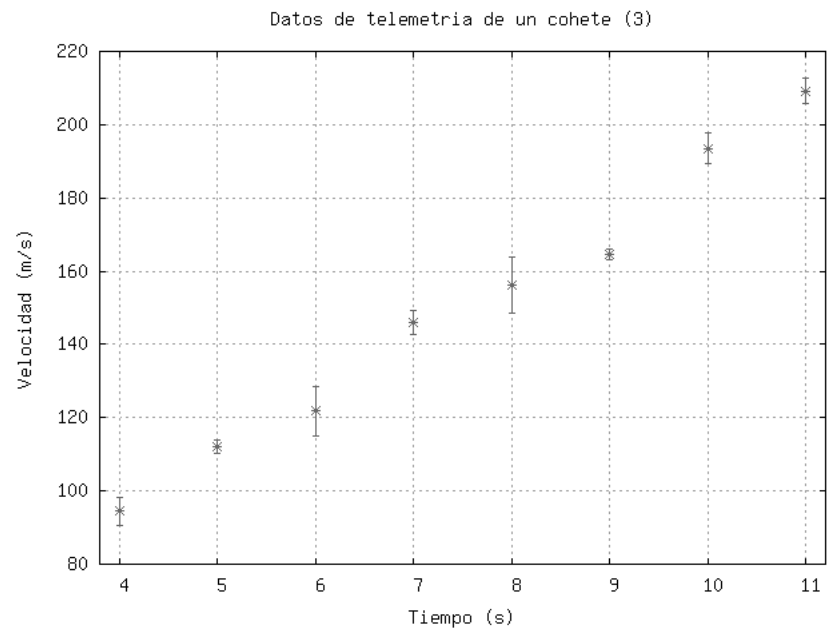


Figura B.4: Datos de telemetría del cohete (3)

que se pesos que se desea asignar a cada matriz:

$$W = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & w_n \end{bmatrix} \quad (B.9)$$

Si se utiliza el criterio<sup>3</sup> de utilizar la dispersión (o más apropiadamente, la **varianza**) para asignar los pesos relativos, la solución obtenida será llamada la *solución de mínima varianza*. En este caso, cada elemento de la diagonal de **W** estará formado por la inversa de la varianza asociada a cada ecuación, de modo que a mayor varianza (dispersión), el peso relativo asignado es menor y viceversa. Esto se representa en la Ecuación B.10.

$$W = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/\sigma_n^2 \end{bmatrix} \quad (B.10)$$

Independientemente del criterio para asignar los pesos, el método comienza asignando los pesos mediante la multiplicación del sistema de ecuaciones por la matriz de pesos **W**. La matriz de coeficientes resultante **WA** no es cuadrada, por lo que partir de allí se siguen los pasos habituales para despejar el vector de incógnitas **X** (como se hizo para el método LMS).

$$\begin{aligned} \mathbf{WAX} &= \mathbf{WC} \\ \mathbf{A^T WAX} &= \mathbf{A^T WC} \\ (\mathbf{A^T WA})^{-1}(\mathbf{A^T WA})\mathbf{X} &= (\mathbf{A^T WA})^{-1}\mathbf{A^T WC} \\ \mathbf{IX} &= (\mathbf{A^T WA})^{-1}\mathbf{A^T WC} \\ \mathbf{X} &= (\mathbf{A^T WA})^{-1}\mathbf{A^T WC} \end{aligned} \quad (B.11)$$

Tomando en cuenta los datos de desviación estándar de la Tabla B.3, la matriz de pesos asociada será:

---

<sup>3</sup>Recuerde que hay una infinidad de criterios posibles. Por ejemplo, en el caso del sistema de ecuaciones GPS aumentado con EGNOS o WAAS hay un criterio específico definido en el documento de la RTCA "Minimum Operational Performance Standards" (MOPS) RTCA/DO-229A/B/C, llamado simplemente "pesos MOPS".

$$\begin{bmatrix} 0,06575 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,30864 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,02163 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,09766 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,01687 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,44444 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,05669 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,08163 \end{bmatrix}$$

Aplicando entonces el procedimiento descrito en la Ecuación B.11, la solución aplicando el método **WMS** para este ejemplo será:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,72091 \\ 4,19839 \\ 72,05006 \end{bmatrix}$$

Entonces, en este caso la función de velocidad del cohete (teórica) será:

$$v(t) = 0,72091 \cdot t^2 + 4,19839 \cdot t + 72,05006$$

En la Figura B.5 se grafican los datos originales con sus barras de error, el ajuste que logra el método LMS y el ajuste obtenido con el método WMS.

En dicha figura se puede apreciar con facilidad que la línea correspondiente al método WMS “tiende a acercarse más” a aquellos puntos que presentan la menor dispersión (y que por tanto tienen el mayor peso).

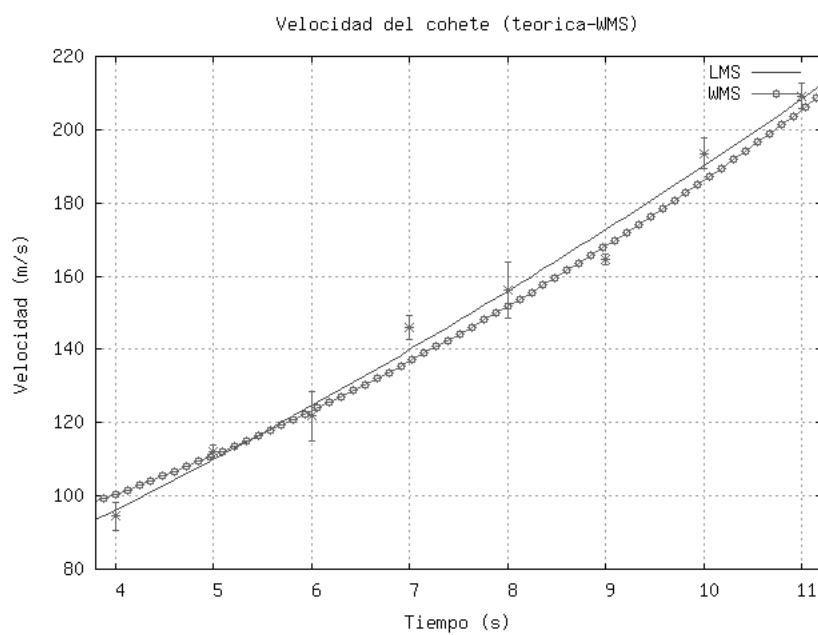


Figura B.5: Velocidad del cohete ajustada con WMS

## Lista de Acrónimos

---

<b>ABAS</b>	Aircraft-Based Augmentation System
<b>ADF</b>	Automatic Direction Finder
<b>AIP</b>	Aeronautical Information Publication
<b>AM</b>	Amplitude Modulation
<b>AU</b>	Astronomical Unit
<b>BIPM</b>	Bureau International des Poids et Mesures
<b>CIO</b>	Conventional International Origin
<b>CIS</b>	Conventional Inertial System
<b>CTS</b>	Conventional Terrestrial System
<b>DME</b>	Distance Measurement Equipment
<b>DTK</b>	Desired Track
<b>DVOR</b>	Doppler VHF Omnidirectional Radiobeacon
<b>ECEF</b>	Earth-Centered, Earth-Fixed
<b>EGNOS</b>	European Geostationary Navigation Overlay System
<b>EHF</b>	Extremely High Frequency
<b>ERP</b>	Earth Rotation Parameters
<b>ETA</b>	Estimated Time of Arrival
<b>ETE</b>	Estimated Time En-route
<b>FIR</b>	Flight Information Region

---

<b>FM</b>	Frequency Modulation
<b>GAST</b>	Greenwich Aparent Sidereal Time
<b>GBAS</b>	Ground-Based Augmentation System
<b>GLONASS</b>	GLObal NAvigation Satellite System
<b>GMT</b>	Greenwich Mean Time
<b>GNSS</b>	Global Navigation Satellite System
<b>GPS</b>	Global Positioning System
<b>GPST</b>	GPS Time
<b>GS</b>	Glide Slope
<b>HDG</b>	Heading
<b>HF</b>	High Frequency
<b>IAU</b>	International Astronomical Union
<b>IERS</b>	International Earth Rotation and Reference Systems Service
<b>INS</b>	Inertial Navigation System
<b>ILS</b>	Instrumental Landing System
<b>ITRF</b>	International Terrestrial Reference Frame
<b>JPL</b>	Jet Propulsion Laboratory
<b>kt</b>	Knot
<b>LAAS</b>	Local Area Augmentation System
<b>LF</b>	Low Frequency
<b>LLA</b>	Latitud, Longitud, Altura
<b>LLZ</b>	Localizer
<b>LOP</b>	Line Of Position
<b>LORAN</b>	LOnge RAnge Navigation
<b>MF</b>	Medium Frequency
<b>MSAS</b>	Multi-functional Satellite Augmentation System
<b>NACC</b>	Navegación Aérea, Cartografía y Cosmografía

---

<b>NDB</b>	Non-Directional Beacon
<b>NED</b>	North-East-Down
<b>NEU</b>	North-East-Up
<b>NGA</b>	National Geospatial-Intelligence Agency
<b>NM</b>	Nautical Mile
<b>OACI</b>	Organización de Aviación Civil Internacional
<b>PAPI</b>	Precision Approach Path Indicator
<b>RF</b>	Radio Frequency
<b>RPM</b>	Revoluciones por minuto
<b>SBAS</b>	Satellite-Based Augmentation System
<b>SHF</b>	Super High Frequency
<b>SI</b>	Sistema Internacional
<b>SID</b>	Standard Instrumental Departure
<b>STAR</b>	STandard ARrival
<b>TAI</b>	Temps Atomique International
<b>TK</b>	Track
<b>UHF</b>	Ultra High Frequency
<b>UT</b>	Universal Time
<b>UT0</b>	Universal Time 0
<b>UT1</b>	Universal Time 1
<b>UT2</b>	Universal Time 2
<b>UTC</b>	Universal Time Coordinated
<b>VASI</b>	Visual Approach Slope Indicator
<b>VHF</b>	Very High Frequency
<b>VLF</b>	Very Low Frequency
<b>VOR</b>	VHF Omnidirectional Radiobeacon
<b>WAAS</b>	Wide Area Augmentation System
<b>WGS</b>	World Geodetic System
<b>XTE</b>	Cross-Track Error





# Bibliografía

---

- [Adsuar, 2002] Adsuar, J. C., 2002. Navegación Aérea. Thomson Paraninfo, S.A., Madrid, España.
- [Andoyer, 1950] Andoyer, H., 1950. Annuaire du Bureau des Longitudes. Paris, Francia.
- [Australian Academy of Science, 1999] Australian Academy of Science, 1999. Calendarios: la pista del tiempo. <http://www.xtec.es/recursos/astronom/articulos/calendars/051key.htm>.
- [Bellis, 2006] Bellis, M., 2006. The invention of Clocks and Calendars. <http://inventors.about.com/library/weekly/aa070701a.htm>.
- [Cadena, 2000] Cadena, R., 2000. El año nuevo. <http://www.rcadena.net/nuevo.htm>.
- [Calvo, 2002] Calvo, J. A., 2002. Fundamentos de Navegación Aérea.. Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid., Madrid, España.
- [Furuti, C. A., 2006] Furuti, C. A., 2006. Cartographical Map Projections. <http://www.progonos.com/furuti/mapproj/normal/toc/carttoc.html>.
- [Geological Survey of Canada, 2005] Geological Survey of Canada, 2005. Geomagnetism. North Magnetic Pole. [http://gsc.nrcan.gc.ca/geomag/nmp/northpole\\_e.php](http://gsc.nrcan.gc.ca/geomag/nmp/northpole_e.php).
- [Hernandez-Pajares et al., 2001] Hernandez-Pajares, M., Juan-Zornoza, J. and Sanz-Subirana, J., 2001. Procesado de Datos GPS: código y fase.. CPET, UPC, Barcelona, España.
- [Hofmann-Wellenhof et al., 2003] Hofmann-Wellenhof, B., Legat, K. and Wieser, M., 2003. Navigation. Principles of positioning and guidance.. Springer-Verlag, Wien, Austria.
- [IERS, 2001a] IERS, 2001a. Coordinates of the mean rotation axis, since 1962 (EOP(IERS) 97 C 01). <http://www.iers.org/maindisp.csl?pid=95-92>.

- [IERS, 2001b] IERS, 2001b. Polar Motion.  
<http://www.iers.org/maindisp.csl?pid=95-88>.
- [I.E.S Gaviota, 2006] I.E.S Gaviota, 2006. Relojes de Sol.  
<http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesgaviota/fisiqui/relojsol/index.html>.
- [ITRF, 2006] ITRF, 2006. ITRF Website. <http://itrf.ensg.ign.fr/>.
- [Jet Propulsion Laboratory, 2000] Jet Propulsion Laboratory, 2000. A mystery of Earth's wobble solved: It's the ocean.  
<http://www.jpl.nasa.gov/releases/2000/chandlerwobble.html>.
- [Kaw, 2002] Kaw, A., 2002. Introduction to Matrix Algebra.  
<http://numericalmethods.eng.usf.edu/matrixalgebrabook/frmmatrixdl.asp>.
- [Meeus, 1991] Meeus, M., 1991. Astronomical Algorithms. Willmann-Bell, Inc., P.O. Box 35025, Richmond, Virginia, USA.
- [ $\mu$ -blox ag., 1999]  $\mu$ -blox ag., 1999. Datum Transformations of GPS Positions.  
<http://www.u-blox.ch>.
- [National Geodetic Survey, 2006] National Geodetic Survey, 2006. What is the geoid?. [http://www.ngs.noaa.gov/geoid/geoid\\_def.html](http://www.ngs.noaa.gov/geoid/geoid_def.html).
- [NGA, 2006a] NGA, 2006a. NGA WGS 84 Geoid Calculator. [http://earth-info.nga.mil/gandg/wgs84/gravitymod/wgs84\\_180/intptw.html](http://earth-info.nga.mil/gandg/wgs84/gravitymod/wgs84_180/intptw.html).
- [NGA, 2006b] NGA, 2006b. WGS 84 Earth Gravitation Model. <http://earth-info.nga.mil/gandg/wgs84/gravitymod/index.html>.
- [Polkin, J. C., 1997] Polkin, J. C., 1997. Cartographical Map Projections.  
<http://math.rice.edu/~polking/cartography/>.
- [Seeber, 1993] Seeber, G., 1993. Satellite Geodesy: Foundations, Methods, and Applications. Walter de Gruyter & Co., Berlin, Germany.
- [Sque, S., 2006] Sque, S., 2006. Distance to the Horizon.  
<http://newton.ex.ac.uk/research/qsystems/people/sque/physics/horizon/>.
- [Swartz, 2006] Swartz, K., 2006. Great Circle Mapper. <http://gc.kls2.com/>.
- [Sáez-Nieto and Portillo-Pérez, 2003] Sáez-Nieto, F. J. and Portillo-Pérez, Y., 2003. Descubrir la Navegación Aérea. Centro de Documentación y Publicaciones Aena., Madrid, España.
- [Torge, 1991] Torge, W., 1991. Geodesy. Walter de Gruyter & Co., Berlin, Germany.
- [WebExhibits, 2006a] WebExhibits, 2006a. Early Roman calendar.  
<http://webexhibits.org/calendars/calendar-roman.html>.

- [WebExhibits, 2006b] WebExhibits, 2006b. Our Year.  
<http://webexhibits.org/calendars/year.html>.
- [Wikipedia, 2006a] Wikipedia, 2006a. Aryabhata.  
<http://en.wikipedia.org/wiki/aryabhata>.
- [Wikipedia, 2006b] Wikipedia, 2006b. Axial tilt.  
[http://en.wikipedia.org/wiki/axial\\_tilt](http://en.wikipedia.org/wiki/axial_tilt).
- [Wikipedia, 2006c] Wikipedia, 2006c. Christopher Columbus.  
[http://en.wikipedia.org/wiki/christopher\\_columbus](http://en.wikipedia.org/wiki/christopher_columbus).
- [Wikipedia, 2006d] Wikipedia, 2006d. Earth.  
<http://en.wikipedia.org/wiki/earth>.
- [Wikipedia, 2006e] Wikipedia, 2006e. Egyptian calendar.  
[http://en.wikipedia.org/wiki/egyptian\\_calendar](http://en.wikipedia.org/wiki/egyptian_calendar).
- [Wikipedia, 2006f] Wikipedia, 2006f. Eratosthenes.  
<http://en.wikipedia.org/wiki/eratosthenes>.
- [Wikipedia, 2006g] Wikipedia, 2006g. Geoid.  
<http://en.wikipedia.org/wiki/geoid>.
- [Wikipedia, 2006h] Wikipedia, 2006h. Gregorian calendar.  
[http://en.wikipedia.org/wiki/gregorian\\_calendar](http://en.wikipedia.org/wiki/gregorian_calendar).
- [Wikipedia, 2006i] Wikipedia, 2006i. History of Geodesy.  
[http://en.wikipedia.org/wiki/history\\_of\\_geodesy](http://en.wikipedia.org/wiki/history_of_geodesy).
- [Wikipedia, 2006j] Wikipedia, 2006j. John Harrison.  
[http://en.wikipedia.org/wiki/john\\_harrison](http://en.wikipedia.org/wiki/john_harrison).
- [Wikipedia, 2006k] Wikipedia, 2006k. Julian calendar.  
[http://en.wikipedia.org/wiki/julian\\_calendar](http://en.wikipedia.org/wiki/julian_calendar).
- [Wikipedia, 2006l] Wikipedia, 2006l. Julian Day.  
[http://en.wikipedia.org/wiki/julian\\_day](http://en.wikipedia.org/wiki/julian_day).
- [Wikipedia, 2006m] Wikipedia, 2006m. Longitude prize.  
[http://en.wikipedia.org/wiki/longitude\\_prize](http://en.wikipedia.org/wiki/longitude_prize).
- [Wikipedia, 2006n] Wikipedia, 2006n. Reference ellipsoid.  
[http://en.wikipedia.org/wiki/reference\\_ellipsoid](http://en.wikipedia.org/wiki/reference_ellipsoid).
- [Wikipedia, 2006o] Wikipedia, 2006o. Spherical harmonics.  
[http://en.wikipedia.org/wiki/spherical\\_harmonic](http://en.wikipedia.org/wiki/spherical_harmonic).
- [Wikipedia, 2007] Wikipedia, 2007. Inertial Guidance System.  
[http://en.wikipedia.org/wiki/inertial\\_navigation\\_system](http://en.wikipedia.org/wiki/inertial_navigation_system).

# Índice alfabético

---

- ángulo
  - crítico, 26
  - límite, 26
- ápsides, 93
- calendario
  - gregoriano, 112
- línea
  - loxodrómica, 126
  - ortodrómica, 126
- LLA
  - conversión, 56
- proyección
  - clasificación, 129
  - conformidad, 124
  - dirección, 126
  - equidistancia, 125
  - equivalencia, 124
  - orientación de la superficie, 130
  - propiedades, 124
- tiempo
  - universal, 119
- año
  - anomalístico, 93
  - sideral, 93
  - tropical medio, 93
  - vernal equinocial, 93, 110, 112, 117
- ABAS, 14
- actitud, 10
- ADF, 11
- afelio, 92
- Aloysius Lilius, 113
- altura
  - elipsoidal, 42
  - ortométrica, 42
- ambigüedad, 16, 18
- amplitud, 21
- analema, 117
- Anexo 4, 135, 136
- anomalía
  - Atlántico sur, 106
- Aryabhata, 33
- ascensión recta, 64
- autálica, 124
- ayudas visuales, 12
- azimut, 11, 65, 66
- bandas laterales, 24
- bearing, 4
- círculo
  - máximo, 29, 126
  - mayor, 29
  - menor, 30
  - Polar Ártico, 97
  - Polar Antártico, 97
- círculo máximo
  - distancia, 79
- calendario
  - juliano, 111, 112
  - lunar, 109
  - lunisolar, 110, 113
  - romano, 110
  - solar, 110
- campo geomagnético, 105
- canal, 24
- carrier, 23
- carta
  - aeronáutica 1:500 000, 138

- aeronáutica mundial 1:1 000 000, 136, 138
- de área, 137
- de aproximación por instrumentos, 136
- de aproximación visual, 137
- de llegada normalizada, 137
- de navegación aeronáutica, 138
- de navegación en ruta, 136
- de posición, 138
- de salida normalizada, 137
- SID, 137
- STAR, 137
- topográfica para aproximaciones de precisión, 136
- cartas, 123
- Cassini, Jacques, 34
- Chandler
  - oscilación, 101
  - período, 101
- ciclo, 20
- ciclo metónico, 110
- Colón, Cristóbal, 33
- constelación, 93
- coordenadas
  - cambio de, 77
- curso, 3
- día
  - juliano, 91
  - sideral, 89
  - solar, 89
- día bisiesto, 112
- datum, 61
  - absoluto, 61
  - geodético, 60
- dead reckoning, 8
- Decca, 19
- declinación, 51, 64, 97, 105
  - magnética, 105
- derrota, 3
- diagrama de radiación, 22
- DME, 11, 17, 109
- DTK, 3, 9
- DVOR, 11
- ECEF
  - conversión, 56
- eclíptica, 73, 93
  - oblicuidad de la, 73, 94, 97
- ecuador, 29
  - celeste, 95
  - magnético, 106
  - medio, 99
  - verdadero, 99
- EGNOS, 14
- eje
  - de los polos, 29
- ejes de coordenadas, 2
- elevación, 65, 66
- elipsoide, 37, 56, 60
  - local, 60
- enrutamiento, 2
- equinoccio
  - de otoño, 95
  - de primavera, 95
  - medio, 99
  - verdadero, 99
  - vernal, 90, 95
- Eratóstenes, 31
- error
  - sistemático, 9
  - transversal, 3
- escala, 124, 125
- espectro
  - electromagnético, 25
  - radioeléctrico, 25
- Estrella Polar, 89
  - Polaris, 89
- ETA, 4
- ETE, 4
- Everest, 35
- excentricidad, 38
- factor de achatamiento, 38, 39, 61, 86
- fadding, 28
- fase, 22
- fix, 8, 9

- frecuencia, 21
- GALILEO, 13
- Galileo Galilei, 55
- GBAS, 14
- geodesia, 35
- geoide, 35, 40, 60
  - ondulación, 35, 42
- GLONASS, 13
- GNSS, 13
- GPS, 13, 109
- gratícula, 124, 138
- Gregorio XIII, 113
- guiado, 2
- Harrison, John, 55
- heading, 3
- horizonte
  - distancia, 72
- Huygens, Christiaan, 34, 55
- ILS, 11
  - GS, 11
  - LLZ, 11
- inclinación
  - magnética, 105
- inclinación de la Tierra, 94
- integridad, 13
- ionosfera, 105
- J2000.0, 63, 92, 97, 99
- línea
  - aclínica, 106
  - agónica, 5, 105
  - automecoica, 125, 134
  - de posición, 15
  - geodésica, 126
  - isógona, 5, 105
  - isoclina, 106
  - isogónica, 105
  - loxodrómica, 128
  - ortodrómica, 126, 138
- latitud, 32, 37, 50, 51, 56
  - eclíptica, 73
  - geocéntrica, 56
  - geodética, 56
- leg, 2
- longitud, 32, 37, 50, 54–56
  - eclíptica, 73, 100
  - premio, 55
- longitud de onda, 21
- LORAN, 19
- Loran, 27
- magnética
  - declinación, 5
  - desviación, 7
- mapas, 123
- marcación, 4
- marco de coordenadas, 2
- marcos de referencia, 45
- matrices
  - de reflexión, 50
  - de rotación, 45
  - de rotación para ángulos pequeños, 49
- meridianos, 29, 129, 138
- mes
  - sinódico, 109
- modulación, 23
  - AM, 24
  - FM, 24
- MSAS, 14
- navegación
  - a estima, 8
  - autónoma, 10
  - basada en ayudas, 11
  - hiperbólica, 19
  - por satélite, 12
  - rho, 11
  - rho-rho, 18
  - rho-theta, 17
  - theta, 11
  - theta-theta, 15
  - visual, 8
- NDB, 11
- Newton, Isaac, 34

- norte, 5
  - de la brújula, 5
  - de la cuadrícula, 7
  - geográfico, 5
  - magnético, 5, 15
- nutación, 97, 98
  - en longitud, 100
  - en oblicuidad, 100
  - matriz de, 100
- OACI, 134
  - Anexo 4, 135, 136
  - carta OACI 1:500 000, 138
  - cartas, 135
  - cartas condicionales, 136
  - cartas obligatorias, 136
  - cartas opcionales, 137
- octante, 51
- Omega, 19
- onda electromagnética, 19
- ondas
  - de línea de vista, 28
  - de suelo, 27
  - de tierra, 27
  - ionosféricas, 27
- PAPI, 12
- paralelo
  - automecoico, 134, 138
- paralelos, 29, 138
- período, 20
- perihelio, 92
- plano
  - de aeródromo para movimientos en tierra, 137
  - de aeródromo/helipuerto, 136, 137
  - de estacionamiento, 137
  - de obstáculos de aeródromo, 136, 137
- polar
  - círculo ártico, 51
  - círculo antártico, 51
  - estrella, 51
  - semieje, 38
- Polaris, 51, 98
- polarización, 22
  - circular, 22
- polo
  - instantáneo, 101
  - movimiento del, 101
  - norte magnético, 105
  - sur magnético, 105
- portadora, 23
- posición, 2, 43
- posicionamiento, 2
- precesión, 98
  - matriz de, 99
- propagación, 25
- proyección, 123
  - azimutal, 126, 133
  - cónica, 129
  - cónica conforme de Lambert, 138
  - cónica normal, 130
  - cónica normal secante, 134, 138
  - cónica normal tangente, 134
  - cónica oblicua, 130
  - cónica transversa, 130
  - cilíndrica, 129
  - cilíndrica ecuatorial secante, 133
  - cilíndrica ecuatorial tangente, 133
  - cilíndrica normal, 130
  - cilíndrica oblicua, 130
  - cilíndrica transversa, 130
  - conformidad, 138
  - ecuatorial, 133
  - equidistancia, 138
  - escenográfica, 134
  - estereográfica, 134
  - gnomónica, 126, 128, 134
  - Mercator, 125, 128
  - meridiana, 133
  - Mollweide, 125
  - normal, 130
  - oblicua, 130
  - ortográfica, 135
  - plana, 129
  - plana normal, 130
  - plana oblicua, 130

- plana transversa, 130
- polar, 133
- posición de la superficie, 133
- posición del punto de, 134
- secante, 133
- tangente, 133
- tipos de superficies, 129
- transversa, 130
- transversal, 130
- Ptolomeo, Claudio, 33
- Punto Aries, 90, 95, 99
- radioayuda
  - azimutal, 11, 15
  - cenital, 11
  - de distancia, 11
- radioayudas, 11
- reflexión, 26
- refracción, 26
- Richer, J., 34
- rotación, 89
- rumbo, 3, 5, 105, 126
- ruta, 2
- SBAS, 14
- semieje
  - ecuatorial, 37, 86
  - mayor, 37, 39, 61
  - menor, 38, 39
  - polar, 38
- sextante, 51
- SI, 89
- sistema de navegación inercial, 10
- sistemas de aumento, 14
- sistemas de coordenadas
  - celestes, 63
  - CIS, 63, 103
  - CTS, 44
  - ECEF, 44, 59, 103
  - eclíptico, 73
  - ecuatorial, 64
  - horizontal, 65
  - LLA, 50, 64
  - local, 59
  - NED, 59
  - NEU, 60
  - terrestres, 43
- sistemas de referencia, 45
- sol medio, 117
- solsticio
  - de invierno, 94
  - de verano, 32, 94
- superficie desarrollable, 123
- terminator, 28
- tiempo
  - atómico internacional, 120
  - ecuación del, 117
  - GPS, 122
  - Loran-C, 122
  - medio de Greenwich, 119
  - solar aparente, 114
  - solar medio, 117
  - solar verdadero, 114
  - universal 0, 119
  - universal 1, 119
  - universal 2, 119
  - universal coordinado, 121
- tiempo sidereal, 90
  - aparente, 90
  - medio, 90
  - verdadero, 90
- TK, 3
- tormentas solares, 105
- Trópico
  - de Cáncer, 95
  - de Capricornio, 95
- trópico
  - de cáncer, 51
  - de capricornio, 51
- tramo, 2
- traslación, 92
- trayectoria, 2
- Unidad Astronómica, 92
- VASI, 12
- velocidad de la luz, 21
- vertical astronómica, 35



VOR, 11, 15, 17

WAAS, 14

waypoint, 2

WGS-84, 39, 86

XTE, 3